

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAITRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE  
M.Ing.

PAR  
KHALED ABASSI

ANALYSE MODALE EXPÉRIMENTALE D'UNE STRUCTURE  
VIBRANT DANS L'EAU EN ÉCOULEMENT TURBULENT

MONTRÉAL, LE 9 NOVEMBRE 2005

(c) droits réservés de Khaled Abassi

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Marc Thomas, directeur de mémoire  
Département de Génie Mécanique de l'École de technologie supérieure

M. Frédéric Laville, président du jury  
Département de Génie Mécanique de l'École de technologie supérieure

M. Mohamed Smaïl, membre du jury  
Ingénieur chez BAE-SYSTEMS

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC  
LE 15 SEPTEMBRE 2005  
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

# **ANALYSE MODALE EXPÉRIMENTALE D'UNE STRUCTURE VIBRANT DANS L'EAU EN ÉCOULEMENT TURBULENT**

**Khaled Abassi**

## **SOMMAIRE**

Les systèmes mécaniques sont soumis à des excitations diverses lors de leur fonctionnement. Selon le type d'excitation, la réponse vibratoire diffère aussi. Les excitations telles que les chocs et excitations aléatoires excitent les fréquences de résonances. Dans le cas particulier des turbines hydrauliques, les ailettes opérant dans l'eau sont soumises à des écoulements turbulents et à des contraintes mécaniques générant des vibrations pouvant être amplifiées à la résonance. Ces excitations peuvent nuire à l'état des ailettes, sujettes à la rupture à cause de l'apparition de fissures, ce qui provoque des relâchements des points de soudures. Ceci se répercute sur la bonne marche de la turbine et peut affecter notablement son rendement énergétique. Il en résulte une perturbation du processus de production qui peut engendrer des coûts faramineux causés par les réparations et l'indisponibilité. L'on voit aisément l'importance de la connaissance des fréquences de résonances structurelles et de l'amortissement qui affectent les contraintes dynamiques, pour définir, lors de la conception, les plages adéquates qui sécurisent le fonctionnement. Ceci dit, il se trouve que les fréquences de résonance et les amortissements de la structure dans l'eau ne sont pas les mêmes que dans l'air à cause des effets de la masse ajoutée et d'amortissement ajouté. Le premier est dû à la présence de l'eau elle-même et le deuxième est provoqué par les écoulements. Cependant, si l'identification des paramètres modaux des structures dans l'air est maîtrisée, il n'en demeure pas moins que l'identification des paramètres des ailettes d'une turbine en opération n'est pas évidente et elle se complique au fur et à mesure que les signaux vibratoires perçus sont bruités. Hydro-Québec qui dispose d'un parc machine hydraulique signifiant, s'intéresse depuis des années à ce type de phénomènes. Les travaux de recherche menés dans ce sens, ont donné naissance au logiciel WETFREQ de prédiction théorique des fréquences de résonance dans l'eau. Ce présent travail a pour objectif d'étudier la faisabilité de l'analyse modale expérimentale sur les structures immergées et soumises à un écoulement turbulent. Neuf chapitres sont présentés, dans lesquels on distinguera essentiellement deux techniques d'analyse modale expérimentale. La première est la méthode classique d'identification dans le domaine spectral à l'aide du marteau d'impact, qui est appliquée dans l'air et dans l'eau stagnante, et la deuxième dite méthode d'identification temporelle, qui offre l'avantage de déterminer à partir des signaux temporels bruités les paramètres modaux d'une structure sans connaître l'excitation et qui est appliquée dans l'air, dans l'eau stagnante et en écoulement et qui est comparée avec la méthode spectrale. Une corrélation des résultats dans l'air est faite avec le logiciel ANSYS et un modèle de prédiction des fréquences de résonance dans l'eau dit Modèle Eau-Air-Équivalent (M.E.A.E) est proposé.

# **EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS FOR A STRUCTURE SUBJECTED TO TURBULENT WATER FLOWS**

**Khaled Abassi**

## **ABSTRACT**

The mechanical systems are subjected to various excitations during their operation. According to the type of the excitation, the vibratory response differs too. The excitations such as the shocks and random excitations excite the resonance frequencies of the system. In the special case of the hydraulic turbines, the blades operating under water are subjected to turbulent flows and mechanical constraints generating vibrations which are may be amplified when the resonance occurs. This fact may harm the state of the turbine blades subjected to the rupture because of the appearance of cracks and that produces the slackening of the welding. This is reflected on the safety functioning of the turbine, and affects notably its energetic efficiency. Thus, the production process is disturbed and colossal costs of repairs and unavailability are generated. One can easily understand the importance of the knowledge of the structural resonance frequencies of the machine in order to specify a safety range of operating conditions during the engineering conception. It is well known that the resonance frequencies of underwater structures are not the same when these structures vibrate in vacuum because of the effects of the added mass and added damping. The first effect is the result of the presence of water itself or fluid in general, the second is caused by the fluid flows. However, if the identification of the parameters of the structures in vacuum is well controlled nowadays, the identification of the parameters of the turbine blades in operating conditions is not obvious, so it becomes complicated as the perceived vibratory signals are disturbed and there is no information about the excitation. Hydro-Quebec which has a several hydroelectric plants is interested by these phenomena. The Research tasks carried out in this field, gave rise to the theoretical prediction software of the underwater resonance frequencies computation which is called WETFREQ. Hence, this present work aims to perform an experimental modal analysis for underwater structure subjected to turbulent flows. Nine chapters are presented, and where one can distinguish two experimental modal analysis techniques. The first is the traditional spectral identification method using the impact hammer, and which is applied in the air and stagnated water conditions, and the second is known as the temporal identification method, which offers the advantage of determining of the structural modal parameters from only the temporal response measurement with no need the knowledge of the excitation nature, which is applied in the air, in stagnated water and in flow conditions and which is correlated with the spectral identification method. Another correlation is made in air condition with respect to ANSYS software computation. Finally, an underwater model of a prediction of the resonance frequencies Water-Air-Equivalent Model (W.A.E.M) is proposed.

## **AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS**

Je tiens à remercier ardemment, tout ceux et celles qui m'ont soutenu de près et/ou de loin à finaliser ce mémoire. Je remercie vivement, M. Marc Thomas pour son précieux encadrement, ses pertinents et prodigues conseils, son professionnalisme, son savoir, son expérience, ses enseignements et son équipe, M. Aouni Lakis de l'école polytechnique de Montréal et M. Luc Marcouiller de l'institut de recherche d'Hydro Quebec (IREQ) pour leur collaboration. Je ne manquerai pas aussi, de remercier l'École de technologie supérieure d'avoir ouvert ses portes, sans frontières, à la science de l'ingénieur. L'IREQ est vivement remercié pour avoir initié ce projet en prêtant leur prototypes et montages d'essais. Avant de finir, je remercie, M. Antoine Tahan et M. Mohammed Smaïl pour leurs orientations et je n'oublierai pas mes sympathies envers tous mes amis et sympathisants. Le savoir a bien une destination, mais aussi une provenance, donc, tout un cheminement. Alors, je fais cette traversée de l'océan. À ma grand-mère et ses premières pièces d'argent, ma mère et ses deux années d'allaitement, mon père et ses deux années d'enseignements. À mes frères et sœurs, au petit aîné, à toute la grande et petite famille sans aucune exception, morts et vivants, à ma belle famille petits et grands. Je remercie ma chère femme, pour sa compréhension, sa patience, ses conseils avec répétition et son émotion. Je termine comme j'ai commencé dans mon coeur, la science comme nos âmes, ont besoin de lumière, alors à la lumière des cieux et de la terre.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS.....	iii
TABLE DES MATIÈRES .....	iv
LISTE DES TABLEAUX.....	viii
LISTE DES FIGURES.....	x
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES.....	xv
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE.....	4
CHAPITRE 2 VIBRATION D'UNE STRUCTURE DANS L'EAU .....	8
2.1 Introduction .....	8
2.1.1 État plan de contrainte et de déformation .....	8
2.2 Petits mouvements d'une structure en présence d'un fluide non visqueux sans écoulement.....	10
2.2.1 Formulation en variables de déplacement.....	11
2.2.2 Équation du système fluide-structure (formulation en variables de pression) .....	12
2.3 Fonctionnelle associée .....	14
2.4 Cas d'un fluide incompressible.....	15
2.5 Effet du fluide sans écoulement sur une structure vibrante .....	16
2.5.1 Mise en évidence de la matrice de masse ajoutée .....	16
2.6 Exemple didactique.....	20
2.6.1 Mise en évidence.....	21
2.7 Estimation de la masse ajoutée pour un problème tridimensionnel .....	23
2.8 Structure vibrante dans un fluide en écoulement .....	25
CHAPITRE 3 IDENTIFICATION DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL .....	27
3.1 Introduction .....	27
3.2 Identification des paramètres modaux sans bruit de mesure.....	27
3.3 Identification des paramètres modaux avec bruit de mesure .....	28
3.4 La cohérence .....	31
3.5 Extraction des paramètres modaux .....	32
3.5.1 Mesure des fréquences de résonances:.....	32
3.5.2 Mesure des amortissements .....	33
3.5.2.1 Bande passante (méthode des 3-db ou de demi puissance).....	33
3.5.2.2 Méthode de la partie réelle de la fonction de transfert d'inertance.....	34
3.5.3 Mesure des modes .....	36
3.6 Considérations pratiques .....	41

3.6.1	L'excitation .....	41
3.6.2	Système libre-libre .....	43
CHAPITRE 4	APPLICATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION DANS LE DOMAINE SPECTRAL .....	44
4.1	Introduction .....	44
4.2	Matériel utilisé : .....	44
4.3	Déroulement des essais .....	48
4.4	Analyse modale dans l'air .....	49
4.4.1	Mesure de la fonction de transfert (FRF) .....	50
4.4.2	Analyse modale de la structure oiseau dans l'air par la méthode des éléments finis .....	52
4.5	Analyse modale dans l'eau stagnante .....	53
4.5.1	Première Hauteur d'immersion ( $H_1 = 15$ cm) .....	54
4.5.1.1	Mesure de la FRF .....	54
4.5.2	Deuxième Hauteur d'immersion ( $H_2 = 37,5$ cm) .....	56
4.5.2.1	Mesure de la FRF .....	56
4.5.2.2	Comparaison eau/air .....	59
4.5.2.2.1	Comparaison des fréquences de résonances .....	59
4.5.2.2.2	Comparaison des amortissements .....	61
4.5.3	Comparaison dans l'eau des hauteurs d'immersion $H_1$ et $H_2$ .....	61
4.5.4	Comparaison des fréquences de résonances $H_2/H_1$ .....	61
4.5.4.1	Comparaison des amortissements $H_2/H_1$ .....	62
4.5.5	Commentaires .....	62
4.6	Comparaison des modes obtenus entre l'ETS et l'IREQ .....	63
4.6.1	Commentaires .....	67
CHAPITRE 5	MÉTHODES D'IDENTIFICATION DES SYSTÈMES .....	68
5.1	Introduction .....	68
5.1.1	Méthodes paramétriques .....	68
5.1.2	Méthodes non paramétriques .....	68
5.1.2.1	Modèle non paramétrique dans le domaine temporel .....	68
5.1.2.2	Modèle non paramétrique dans le domaine fréquentiel .....	69
5.2	Systèmes et modèles .....	69
5.3	Bruit blanc .....	70
5.4	Systèmes déterministes et systèmes stochastiques .....	71
5.5	Représentation paramétrique .....	72
5.5.1	Représentation paramétrique dans le domaine temporel discret .....	73
5.5.1.1	Modèle ARMA pour un système déterministe .....	73
5.5.1.2	Modèle de l'erreur de sortie .....	74
5.5.1.3	Modèle AR (auto-regressif) .....	75
5.5.1.4	Modèle ARMA pour un système stochastique .....	75
5.5.1.5	Modèle ARX .....	76
5.5.1.6	Modèle ARMAX .....	77

5.5.1.7	Modèle de Box-Jenkins.....	78
CHAPITRE 6	IDENTIFICATION DANS LE DOMAINE TEMPOREL.....	80
6.1	Introduction.....	80
6.2	Méthodes ARMA et AR.....	80
6.2.1	Éléments théoriques.....	80
6.2.1.1	Formulation de l'équation d'état d'un système mécanique linéaire.....	80
6.2.1.2	Résolution de l'équation d'état dans le domaine temporel.....	81
6.3	Formulation ARMA.....	83
6.3.1	Cas d'un seul point d'excitation et d'un seul pont de mesure (SISO) ...	84
6.4	Détermination des paramètres modaux.....	85
6.5	Problème d'identification.....	86
6.6	Méthode des moindres carrés linéaire.....	88
6.7	Identification par la méthode AR (Auto-Régressif).....	90
6.7.1	Méthode de Yule-Walker (Y-W).....	90
6.7.2	Méthodes d'estimation par les moindres carrés.....	91
6.7.3	Méthode de covariance.....	91
6.7.4	Méthode des covariances modifiées (M.C.M).....	94
6.8	Identification par la méthode ARMA (entrée inconnue).....	95
6.9	Choix de l'ordre du modèle.....	95
6.9.1	Critère d'Akaike.....	96
6.9.2	Critère de stabilité.....	96
6.10	Choix de la fréquence d'échantillonnage.....	97
CHAPITRE 7	ÉTUDE THÉORIQUE ET MISE AU POINT NUMÉRIQUE.....	98
7.1	Introduction.....	98
7.2	Cas à un seul degré de liberté.....	98
7.3	Choix de l'ordre du modèle.....	99
7.4	Choix de la structure du modèle.....	102
7.4.1	Méthode AR.....	102
7.4.2	Comparaison de la précision fréquentielle.....	102
7.4.2.1	Comparaison des approches AR selon le taux d'Amortissement et le niveau de bruit.....	103
7.4.2.2	Méthode de covariance modifiée.....	103
7.4.2.3	Méthode de covariance.....	106
7.4.2.4	Méthode de Yule-Walker.....	109
7.4.3	Comparaison des méthodes selon le niveau de bruit limite.....	112
7.5	Méthode ARMA.....	116
7.5.1	Précision spectrale.....	116
7.5.2	Effet du bruit sur la méthode ARMA.....	116
7.5.3	Niveau de bruit limite pour la méthode ARMA.....	120
7.6	Conclusion.....	122
7.7	Cas d'un système à plusieurs degrés de liberté.....	122
7.8	Excitation impulsionnelle.....	123



7.8.1	Excitation avec un bruit blanc : .....	126
7.8.2	Conclusion .....	129
CHAPITRE 8	APPLICATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION DANS LE DOMAINE TEMPORELLE SUR LA STRUCTURE OISEAU DE L'IREQ .....	130
8.1	Analyse modale dans l'air .....	130
8.2	Comparaison ARMA et AR .....	133
8.2.1	Comparaison les différentes méthodes.....	133
8.3	Analyse modale dans l'eau stagnante .....	135
8.3.1	Mise en évidence de la masse ajoutée.....	138
8.4	Analyse modale dans l'eau en écoulement .....	139
8.4.1	Mise en évidence de l'amortissement ajouté .....	141
8.4.2	Comparaison des méthodes AR et ARMA .....	143
8.4.3	Comparaison entre les différentes méthodes.....	144
CHAPITRE 9	MODÈLE EAU-AIR ÉQUIVALENT (M.E.A.E) .....	146
9.1	Objectif de l'étude.....	146
9.2	Modèle Eau-Air-Équivalent (M.E.A.E) .....	147
9.3	Comparaison des modes.....	149
9.4	Conclusion .....	152
DISCUSSION ET INTREPRETATION DES RÉSULTATS .....		153
CONCLUSION.....		154
RECOMMANDATIONS.....		157
ANNEXES :		
1 :	Programme éléments finis sur ansys .....	158
2 :	Programme matlab de calcul des amortissements et des modes par la méthode spectrale .....	161
3 :	Programme matlab (tracé des modespropredelastructureoiseau).....	168
4 :	Logiciel d'identidfication dans le domainetemporel(méthodes ar et arma).....	178
5 :	Certificat de calibration des accélétoètres.....	187
6 :	Analyse modale de la structure oiseau dans l'air avec le logiciel Catia .....	189
BIBLIOGRAPHIE .....		196

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Fréquences de résonances et amortissements de la structure oiseau mesurés dans l'air avec la méthode spectrale..... 51
Tableau II	Fréquences expérimentales dans l'air comparées avec la méthode des éléments finis (Résultats de l'ETS et de l'IREQ)..... 53
Tableau III	Fréquences de résonances et amortissements de l'ailette dans l'eau stagnante. $H_1=15\text{cm}$ ..... 56
Tableau IV	Fréquences de résonances et amortissements de la structure oiseau dans l'eau stagnante $H_2=37,5\text{ cm}$ ..... 58
Tableau V	Les résultats mesurés dans l'eau à l'ETS comparés aux résultats mesurés et calculés dans l'eau stagnante à l'IREQ ..... 58
Tableau VI	Comparaison des fréquences de résonance dans l'air et dans l'eau de 0 à 500 Hz ..... 60
Tableau VII	Rapport des amortissements Eau/Air pour la hauteur $H_1=15\text{ cm}$ .. 61
Tableau VIII	Rapport des amortissements Eau/Air pour la hauteur $H_2=37,5\text{ cm}$ ..... 61
Tableau IX	Fréquences de résonances en Hz des profondeurs $H_2$ et $H_1$ ..... 62
Tableau X	Rapport des amortissements $H_2/H_1$ ..... 62
Tableau XI	Modèles paramétriques ..... 79
Tableau XII	Ordres obtenus avec le critère d'Akaike ..... 99
Tableau XIII	Ordres obtenus avec le critère de stabilité pour la fréquence..... 101
Tableau XIV	Ordres obtenus avec le critère de stabilité pour l'amortissement 101
Tableau XV	Fréquences et amortissements estimés avec les méthodes ARMA et AR dans le cas d'une réponse impulsionnelle d'un système à trois degrés de liberté..... 125
Tableau XVI	Fréquences et amortissements estimés avec les méthodes ARMA et AR dans le cas d'une réponse à un bruit blanc d'un système à trois degrés de liberté..... 128
Tableau XVII	Comparaison dans l'air de la méthode ARMA avec la méthode spectrale pour la structure oiseau..... 131
Tableau XVIII	Comparaison AR/ARMA..... 133

Tableau XIX	Comparaison dans l'eau stagnante de la méthode ARMA avec la méthode spectrale pour la structure oiseau .....	136
Tableau XX	Comparaison Eau/Air pour la structure oiseau (Méthode ARMA).....	138
Tableau XXI	Paramètres modaux mesurés avec la méthode ARMA sous écoulement de la structure oiseau.....	140
Tableau XXII	Comparaison Air/Écoulement pour la structure oiseau .....	141
Tableau XXIII	Comparaison AR/ARMA (écoulement).....	143
Tableau XXIV	Masses volumiques équivalentes pour chaque mode.....	148
Tableau XXV	Erreur par rapport à la valeur $r_{moyen}$ sur les fréquences estimées dans l'eau .....	149

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1	Masse ajoutée d'une plaque immergée dans l'eau ..... 5
Figure 2	État de contrainte tridimensionnel d'un solide homogène isotrope ..... 9
Figure 3	Système couplé fluide-structure..... 11
Figure 4	Masse ajoutée pour différentes géométries pour une accélération latérale de gauche à droite..... 19
Figure 5	Système piston fluide ..... 20
Figure 6	Plaque plane ..... 24
Figure 7	Diagramme de Bode..... 28
Figure 8	Mesure des fréquences de résonance ..... 32
Figure 9	Méthode des 3dB (échelle logarithmique) ..... 34
Figure 10	Calcul du taux d'amortissement par la méthode de la partie réelle de l'inertance $H(j\omega)$ ..... 35
Figure 11	Excitation par une impulsion (fonction de Dirac)..... 42
Figure 12	Gamme utile d'un impact..... 42
Figure 13	La chaîne de mesure utilisée ..... 44
Figure 14	Accéléromètre Type PCB330A..... 45
Figure 15	Conditionneur à 16 canaux PCB ..... 45
Figure 16	Carte d'acquisition à 8 canaux ..... 46
Figure 17	Marteau d'impact PCB, Capteur de force et conditionneur pour marteau d'impact PBC ..... 46
Figure 18	Tige en aluminium pour prolonger le marteau dans l'eau ..... 47
Figure 19	Le bac d'eau et la structure oiseau de l'IREQ..... 48
Figure 20	Points de mesures sur la structure oiseau (16 points) ..... 49
Figure 21	Montage de la structure oiseau dans l'air..... 50
Figure 22	Fonction de transfert au point 1, mesures dans l'air (Inertance $A/F$ )..... 50
Figure 23	Superpositions des fonctions de transfert (mesures faites dans l'air) ..... 51

Figure 24	Modélisation par éléments finis de la structure oiseau suspendue par deux ressorts élastiques.....	52
Figure 25	Structure oiseau immergée dans l'eau stagnante .....	54
Figure 26	Fonction de transfert au point 1 mesurée dans l'eau. $H_1 = 15$ cm .	55
Figure 27	Superpositions des fonctions de transfert mesurées dans l'eau. $H_1 = 15$ cm.....	55
Figure 28	Fonction de transfert en un point mesurée dans l'eau. $H_2 = 37,5$ cm .....	57
Figure 29	Superpositions des Fonctions de transfert mesurées dans l'eau. $H_2 = 37,5$ cm.....	57
Figure 30	Corrélation Eau/Air au même point de mesure de fréquences de résonances.....	60
Figure 31	Comparaison des modes dans l'air entre l'ETS et l'IREQ .....	63
Figure 32	Comparaison des modes dans l'air entre l'ETS et l'IREQ, (suite de la figure 31).....	64
Figure 33	Comparaison des modes dans l'eau entre l'ETS et l'IREQ .....	65
Figure 34	Comparaison des modes dans l'eau entre l'ETS et l'IREQ (suite).....	66
Figure 35	Comparaison des modes dans l'eau entre l'ETS et l'IREQ (suite).....	67
Figure 36	Configuration entrée-sortie .....	69
Figure 37	Bruit gaussien de variance 1 et de moyenne nulle (Signal généré sur MATLAB avec la fonction randn) .....	71
Figure 38	Système comportant une combinaison d'un processus de perturbation gaussienne $w(t)$ et un bruit de mesure $v(t)$ .....	72
Figure 39	Modèle Erreur de sortie (OE).....	74
Figure 40	Modèle AR.....	75
Figure 41	Modèle ARMA .....	76
Figure 42	Modèle ARX .....	77
Figure 43	Modèle ARMAX.....	77
Figure 44	Modèle Box-Jenkins .....	78
Figure 45	Réponse d'un système à un seul degré de liberté .....	98
Figure 46	Erreur relative sur la fréquence et l'amortissement en fonction de l'ordre du modèle.....	100

Figure 47	Comparaison des approches AR .....	102
Figure 48	Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de covariance modifiée.....	103
Figure 49	Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de covariance modifiée (en 3D) .....	104
Figure 50	Erreur relative sur la fréquence en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de covariance modifiée ...	105
Figure 51	Erreur relative sur la fréquence en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de covariance modifiée (représentation 3D).....	106
Figure 52	Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de covariance.....	107
Figure 53	Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de Covariance (représentation 3D).....	107
Figure 54	Erreur relative sur la fréquence en fonction de la fréquence et du niveau de bruit pour la méthode de Covariance .....	108
Figure 55	Erreur relative sur la fréquence en fonction de la fréquence et du niveau de bruit pour la méthode de covariance (en 3D).....	109
Figure 56	Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de Yule-Walker .....	110
Figure 57	Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de Yule-Walker (représentation 3D) .....	110
Figure 58	Erreur relative sur la fréquence en fonction de la fréquence et du niveau de bruit pour la méthode de Yule-Walker.....	111
Figure 59	Erreur relative sur la fréquence en fonction de la fréquence et du niveau de bruit pour la méthode de Yule-Walker (en 3D) .....	112
Figure 60	Niveau de bruit limite des approches AR pour l'estimation de l'amortissement .....	113
Figure 61	Niveau de bruit limite des approches AR pour l'estimation de la fréquence .....	115
Figure 62	Densité de puissance spectrale pour le modèle ARMA.....	116

Figure 63	Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode ARMA..	117
Figure 64	Erreur relative sur l'Amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode ARMA (représentation 3D).....	118
Figure 65	Erreur relative sur la fréquence en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode ARMA .....	119
Figure 66	Erreur relative sur la fréquence en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode ARMA (représentation 3D).....	120
Figure 67	Bruit limite pour l'estimation de l'amortissement avec la méthode ARMA .....	121
Figure 68	Bruit limite pour l'estimation de la fréquence .....	121
Figure 69	Système à trois degrés de liberté.....	123
Figure 70	Simulink du système à trois degrés de liberté excité par une impulsion.....	124
Figure 71	Réponse à une excitation impulsionnelle du système à trois de degrés de liberté.....	124
Figure 72	Comparaison des approches AR et ARMA avec la méthode spectrale.....	126
Figure 73	Bruit blanc d'entrée.....	127
Figure 74	Réponse du système à trois degrés de liberté excité avec un bruit blanc.....	127
Figure 75	Comparaison des approches AR et ARMA avec la méthode spectrale (Réponse aléatoire).....	129
Figure 76	Réponse temporelle de la structure oiseau dans l'air.....	130
Figure 77	PSD estimé dans avec la méthode ARMA,échelle logarithmique (structure oiseau dans l'air) .....	132
Figure 78	Comparaison du PSD mesuré (calculé avec le FFT) versus le PSD estimé avec la méthode ARMA (structure oiseau dans l'air) .....	132
Figure 79	Comparaison du PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et ceux obtenus avec les méthodes AR et ARMA (tout les modes de la structure oiseau dans l'air).....	134

Figure 80	Comparaison du PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et ceux obtenus avec les méthodes AR et ARMA (premier mode de la structure oiseau dans l'air).....	134
Figure 81	Réponse du modèle réduit de la structure oiseau dans l'eau stagnante .....	135
Figure 82	PSD estimé dans avec la méthode ARMA, échelle logarithmique (structure oiseau dans l'eau stagnante) .....	137
Figure 83	Comparaison du PSD mesuré (calculé avec le FFT) versus le PSD estimé avec la méthode ARMA (structure oiseau dans l'eau stagnante).....	137
Figure 84	Banc d'essais d'écoulement (structure oiseau) .....	139
Figure 85	Réponse de la structure oiseau excitée avec un écoulement turbulent.....	140
Figure 86	Comparaison du PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et celui obtenu avec la méthode ARMA(structure oiseau dans l'eau en écoulement).....	142
Figure 87	Comparaison du PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et ceux obtenus avec les méthodes AR et ARMA (tout les modes de la structure oiseau dans l'eau en écoulement) .....	144
Figure 88	Comparaison du PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et ceux obtenus avec les méthodes AR et ARMA (premiers modes de la structure oiseau dans l'eau en écoulement) .....	145
Figure 89	Masse ajoutée d'une structure immergée dans l'eau.....	146
Figure 90	Comparaison des modes mesurés dans l'eau avec les modes estimés avec le M.E.A.E.....	150
Figure 91	Comparaison des modes mesurés dans l'eau avec les modes estimés avec le M.E.A.E.....	151
Figure 92	Comparaison des modes mesurés dans l'eau avec les modes estimés avec le M.E.A.E.....	152



## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

$\arg \min_{\hat{\theta}} J_N$	Opérateur qui désigne la valeur minimale de $J_N$
$a^f_k$	Paramètres linéaires de prédiction à priori
$a^f$	Vecteur des paramètre AR estimés à priori
$a^h_p$	Paramètres linéaires de prédiction à posteriori
$a_i$	Paramètres d'un Modèle AR
$a_{mi}(t)$	Déplacements généralisés dans la base modale
$\{a_m\}$	Vecteur des composantes des déplacements généralisés $a_{mi}(t)$
$\{\ddot{a}_m\}$	Vecteur des composantes d'accélération généralisées
AR	Auto Régressif
ARMA	Auto Regressif Moving Average (auto régressif à moyenne mobile)
$AIC$	Critère d'information d'Akaike
$[A]_{(2n,2n)}$	Matrice d'état
$A(z^{-1})$	Polynôme de la partie MA pour une entrée déterministe
$b_i$	Paramètres d'un Modèle
$B(z^{-1})$	Polynôme de la partie AR pour une entrée déterministe
$[B]$	Matrice d'observation
$c$	Célérité du son
$C(z^{-1})$	Polynôme de la partie MA pour une entrée inconnue
$[C]$	Matrice d'amortissement
$C_f$	Énergie cinétique du fluide
$C_s$	Énergie cinétique de la structure
$div$	Opérateur de Divergence
$[D_c]$	Matrice de contrôle
$[D]$	Matrice des propriétés du matériau

$D(z^{-1})$	Polynôme de la partie AR pour une entrée inconnue
$E$	Module d'Young
$E(x(t))$	Espérance mathématique e la variable $x(t)$
<i>Erreur (%)</i>	Erreur relative
<i>Erreur</i>	Erreur absolue
$f$	Fréquence (Hz)
$f_c$	Fréquence d'échantillonnage (Hz)
$f_{\max}$	Fréquence maximale d'analyse
$f(\text{Hz})$	Fréquence théorique en Hz
$f(\text{AR})$	Fréquence estimée avec les méthodes AR et ARMA
$f(t)$	Force d'excitation
$f_{pg}(x)$	Densité de probabilité d'un processus gaussien
$f_{gi}$	Forces généralisées
$f_n$	Fréquence de résonance (Hz)
FFT	Transformée de Fourier rapide
$\{F\}$	Amplitude de force $f(t)$ mesurée
$F(\omega)$	est la transformée de Fourier de la force $f(t)$
$F_g$	Vecteur des forces généralisées $f_{gi}$
$FL$	Domaine qui délimite la partie fluide
$FS$	Domaine qui délimite la partie fluide structure
$grad\vec{d}$	Opérateur du vecteur gradient
$grad(p_r)$	Vecteur gradient de la pression $p_r$ du fluide
$h(\tau)$	Réponse impulsionnelle d'un système
$H$	Hauteur du liquide
$H(j\omega)$	Fonction de transfert complexe (FRF)

$H_{sr}(\omega_i)$	Fonction de transfert au $i^{ème}$ mode, mesurée au point $s$ sous l'action de la force exercée au point $r$
$H(z)$	Fonction de transfert du système dans le domaine $z$
$J_N$	Fonction coût
$k$	Rigidité
$[K]$	Matrice de rigidité
$K_s$	Raideur du solide
$\ell$	Longueur de référence
$m_{air}$	Masse de la structure dans l'air
$m_{eau}$	Masse de la structure dans l'eau
$[m_a]$	Matrice de masse ajoutée
$[M]$	Matrice masse
M.C.M	Méthode de covariance modifiée
M.C	méthode de covariance
$M_a$	Masse ajoutée
$M_f$	Masse du fluide
$M_s$	Masse du solide
$\bar{n}$	Vecteur normal du domaine $FS$
$N$	Nombre d'échantillons de mesures
$p$	Ordre de la partie AR
$p_r$	Pression du fluide
$\ddot{p}_r$	Dérivée seconde de la pression $p_r$
[P]	Modes normalisés par rapport à l'unité
$P_a$	Pression atmosphérique
$P_0$	Pression moyenne de l'écoulement du fluide
$q$	Ordre de la partie MA

$q(t)$	Déplacement
$\dot{q}(t)$	Vitesse
$\ddot{q}(t)$	Accélération
$[Q]$	Matrice des mesures
$r$	Point d'excitation
$[R]$	Matrice de covariance du signal $y(t)$
$RSB$	Rapport signal bruit
$R_{yy}(\tau)$	Fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$
$R_{yu}$	Fonction d'Auto-covariance croisée pour deux signaux $y(t)$ et $u(t)$
$s$	Point de mesure
$[S]^T$	Mode
$ST$	Domaine qui délimite la partie structure
$S_{AR}$	La densité de puissance spectrale du processus AR
$S_{ARMA}$	Densité de puissance spectrale du processus ARMA d'ordres $p$
$S_{yy}(\omega)$	La densité de la puissance spectrale (DSP) du signal $y(t)$
$S_{yu}(\omega)$	Densité de puissance spectrale croisée
$T$	Période d'échantillonnage
$[T_p]$	Matrice des mesures d'ordre $(N - p) \times (p + 1)$
$[T_p^H]$	Matrice hermitienne
$T_p^T$	Transposée de la matrice $T_p$
$TZ^{-1}$	Transformée en $z$ inverse
$u(t)$	Entrée d'un système
$\{U\}$	Amplitude des déplacements mesurés
$U_f$	Énergie potentielle de compressibilité du fluide
$U(j\omega)$	Transformée de Fourier de l'entrée

$U_s$	Énergie potentielle de déformation de la structure
$U(z)$	entrée d'un système dans le domaine des $z$
$v(t)$	Bruit indépendant de l'entrée
$V_0$	Vitesse moyenne d'écoulement du fluide
$w(t)$	Bruit gaussien
$x_f$	Déplacement du fluide
$\dot{x}_f$	Vitesse du fluide
$\ddot{x}_f$	Accélération du fluide
$x_s$	Déplacement de la structure
$\dot{x}_s$	Vitesse de la structure
$\ddot{x}_s$	Accélération de la structure
$x(t)$	Réponse vibratoire en déplacement d'un système
$\{X_s\}$	Vecteur propre
$\{\hat{y}\}$	Sortie prédite
$\hat{y}^f(t)$	Sortie prédite à priori pour un modèle AR
$\hat{y}^h(k)$	Prédicteur linéaire à posteriori
$y(t)$	Sortie d'un système
Y-W	Méthode Yule-Walker
$Y(j\omega)$	Transformée de Fourier de la réponse d'un système
$Y(z)$	Sortie d'un système dans le domaine des $z$
$Z$	Déplacement du piston suivant l'axe $z$
$\ddot{Z}$	Dérivée seconde du déplacement du piston suivant l'axe $z$
3D	Trois dimensions
$\alpha$	Coefficient adimensionnel du modèle d'amortissement proportionnel (terme de masse)

$\beta$	Coefficient adimensionnel du modèle d'amortissement proportionnel (terme de raideur)
$\Delta f$	Intervalle fréquentiel
$\frac{\partial}{\partial \theta}$	Opérateur de la dérivée partielle par rapport à $\theta$
$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	Opérateur de la dérivée partielle seconde par rapport à $z$
$\varepsilon(t)$	Erreur de prédiction
$[\varepsilon]$	Tenseur de déformation
$\varepsilon^f$	Erreur de prédiction à priori du processus AR
$\varepsilon_c^f$	Erreur de prédiction à priori de la méthode de covariance
$\varepsilon^b$	Erreur de prédiction à posteriori
$\gamma^2$	Cohérence
$\{\zeta\}$	Vecteur représentant l'erreur d'estimation
$\lambda_p$	Valeurs propres complexes de la matrice $[A]$
$\lambda$	Rapport de la fréquence de résonance dans l'eau sur la fréquence de résonance dans l'air
$\mu_x$	Moyenne du processus gaussien
$\omega$	Pulsation (radian)
$\omega_r$	Fréquence naturelle (radian)
$\omega_a$	Fréquence de résonance dans l'air
$\omega_c$	Fréquence de résonance dans l'eau
$\phi_s$	Fonctionnelle associée à l'équation de structure
$\phi_f$	Fonctionnelle associée à l'équation du fluide
$\phi_c$	Fonctionnelle du système couplé fluide structure

$\Phi(t)$	Matrice de transition (2n, 2n)
$[\sigma]$	Tenseur de contraintes dans la structure
$\{\bar{\tau}\}$	Vecteur tangent du domaine $FS$
$\rho_f$	Masse volumique du fluide au repos
$\rho^f$	Critère d'erreur quadratique de la méthode de covariance
$\rho_a$	Masse volumique de la structure dans l'air (2720 kg/m3)
$\rho_c$	Masse volumique équivalente en (kg/m3)
$\rho_m$	Masse volumique équivalente moyenne (kg/m3)
$\sigma^2_x$	Variance
$\sigma_y$	Écart type du signal pur (sans bruit) $y$
$\sigma_w$	Écart type du bruit dans le signal $w(t)$
$\sigma_w^2$	Variance du bruit blanc $w(t)$
$\{\theta\}$	Vecteur paramètres
$\{\hat{\theta}\}$	Estimé du vecteur paramètre $\{\theta\}$
$\{\hat{\theta}_N^*\}$	Vecteur paramètre estimé optimal
$\xi$	Taux d'amortissement (%)
$\xi(\%)$	Taux d'amortissement théorique en %
$\xi(AR)$	Taux d'amortissement estimé avec les méthodes AR et ARMA
$\nu$	Coefficient de poisson
$\otimes$	Produit tensoriel

## INTRODUCTION

### **Problématique de recherche**

Si l'informatique de nos jours met à notre disposition une panoplie de logiciels très prisés dans l'industrie tels que les logiciels ANSYS, FEMLAB, NASTRAN et autres, et si ces logiciels nous offrent le luxe de calculer aussi vite qu'un éclair les fréquences de résonances d'un système donné, il est néanmoins toujours vrai que l'amortissement est un paramètre inconnu dans la technique des éléments finis. Ceci prouve que l'analyse modale expérimentale est une procédure incontournable du moment où elle demeure encore la seule manière nous permettant d'estimer les amortissements des structures.

Particulièrement dans le cas des structures vibrant dans l'eau, la simulation par éléments finis devient encore plus compliquée, et même si on connaît au préalable l'amortissement, l'estimation des fréquences de résonance dans ce cas n'est pas aussi simple que dans le cas où la structure vibre in vacuo. En effet, l'eau et la structure étant en contact, il y a une interaction fluide-structure. Ceci complique davantage la formulation mathématique, surtout en présence d'écoulements turbulents. On pourrait modéliser un tel système, mais l'expérience reste le meilleur critère de validation. Ceci prouve une fois de plus tout l'intérêt que comporte l'analyse modale expérimentale. D'autre part, Hydro-Quebec exploite environ 350 groupes turbines-alternateurs, ainsi son institut de recherche (IREQ), s'intéresse au phénomène des vibrations des turbines hydrauliques à travers son projet de simulation numérique à l'aide de Modèles d'Analyse des Turbines Hydrauliques (MATH ), ce qui permet à la fois, le calcul de l'écoulement fluide pour diverses géométries et divers types de turbines hydrauliques, le calcul des contraintes statiques et dynamiques et le calcul des modes théoriques de vibration dans l'eau dans le but de déterminer avec exactitude les fréquences naturelles de la turbine afin de savoir si celles-ci coïncident avec une excitation connue ce qui pourrait être la cause des fissurations prématurées ou d'une fatigue accrue. La validation



expérimentale des résultats du projet MATH s'annonce très importante car la combinaison des technologies de simulation de ce dernier avec des mesures expérimentales permet de mieux comprendre les paramètres influant le comportement et le rendement d'une turbine.

## **Objectif**

Dans le cadre de la validation des calculs théoriques des fréquences de résonance de l'IREQ, ce mémoire a pour but de mettre en œuvre la technique d'analyse modale expérimentale sur un modèle d'ailette appartenant à l'IREQ pour identifier les paramètres modaux de cette dernière dans l'air, dans l'eau stagnante et dans l'eau turbulente, de faire la comparaison entre les différents résultats et de mettre en évidence les deux phénomènes de masse ajoutée et d'amortissement ajouté.

## **Méthodologie et plan du mémoire**

Lorsqu'une structure est entourée d'un fluide, des forces de réactions sont engendrées, on parle alors d'interaction fluide structure. Lorsque le fluide est au repos, on observe un phénomène dit de masse ajoutée, et lorsque le fluide est en écoulement, on observe en plus un phénomène d'amortissement ajouté. Ceci a pour effet le changement des paramètres modaux de la structure. Le chapitre 2 présente les principaux éléments théoriques de l'interaction fluide-structure.

Deux techniques seront présentées pour mettre évidence ces phénomènes, la première est l'analyse modale classique dite méthode d'identification dans le domaine spectrale à l'aide du marteau d'impact. Pratiquement, elle est adéquate pour des applications dans l'air mais on l'appliquera aussi en présence de l'eau stagnante. Le chapitre 3 sera consacré à la présentation générale des éléments théoriques de cette méthode, le chapitre 4 sera une présentation des résultats de son application. Cette méthode se base sur la

connaissance de la force d'excitation mesurée à l'aide d'un capteur de force installé sur le marteau d'impact ce qui permet de mesurer les fonctions de transfert. Cependant en présence des écoulements turbulents, il est impossible d'avoir une information sur l'excitation et les fonctions de transfert sont alors inconnues. L'analyse modale expérimentale dans ce cas sera basée sur la deuxième technique qui est celle de l'identification des paramètres modaux dans le domaine temporel. Ne disposant que du signal de la sortie mesurée, l'identification sera basée sur la méthode paramétrique A.R.M.A (Auto Regressif Moving Average).

Le chapitre 5 présente d'une manière générale les techniques d'identification des systèmes les plus rencontrées dans la littérature. Le chapitre 6 sera lui une présentation théorique des méthodes A.R.M.A et A.R (Auto Régressif) qui ont la particularité, par rapport aux autres techniques d'identification des systèmes, d'identifier les paramètres sans connaître l'excitation. La comparaison entre ces deux méthodes à travers une mise au point numérique en tenant compte de différents taux d'amortissement et niveaux de bruits fera l'objet du chapitre 7. Les applications de la méthode A.R.M.A sont présentées dans le chapitre 8. Dans le chapitre 9, on verra un modèle dit modèle Eau-Air-Équivalent (M.E.A.E) où on présentera une méthode approchée pour la prédiction des fréquences de résonance dans l'eau à partir des fréquences mesurées dans l'air.

Ce projet a donné naissance à quatre programmes informatiques présentés dans les annexes. Le premier est un modèle élément finis sur ANSYS qui calcule les modes propres de la structure oiseau de l'IREQ dans l'air (annexe 1). Le deuxième permet de calculer sur MATLAB les fréquences de résonances, les amortissements et les modes avec la méthode fréquentielle (annexe 2). Le troisième permet de visualiser dans l'environnement Matlab une animation en trois dimensions des modes propres de la structure oiseau (annexe 3). Le quatrième est un logiciel d'identification dans le domaine temporel avec les méthodes paramétriques AR et ARMA (annexe 4).

## **CHAPITRE 1**

### **REVUE DE LA LITTÉRATURE**

Ce projet touche à différents domaines technologiques qui ont déjà fait l'objet des travaux de recherches précédents, à savoir les vibrations dans l'eau, l'identification des paramètres dans le domaine fréquentiel et l'identification des paramètres dans le domaine temporel.

Hydro-Quebec a déjà entamé plusieurs travaux de recherche sur le domaine des vibrations des structures dans l'eau dans le cadre du projet M.A.T.H. Principalement, dans le cadre de son mémoire de maîtrise au département en génie mécanique de l'université de Sherbrooke, Lussier 1998 [1] a fait une étude théorique de l'effet du fluide sur les vibrations libres d'une structure élastique, en considérant le fluide incompressible et cette étude s'est intéressée à l'effet de masse ajoutée du fluide. En se basant sur la formulation par éléments finis pour la structure et la formulation intégrale pour le fluide, un logiciel a été développé pour le calcul de l'influence du fluide sur les vibrations d'une turbine hydraulique. Le logiciel permet donc le calcul des fréquences et modes propres dans l'eau.

Selmane et Lakis (1997)[2], ont publié une théorie sur les effets d'un écoulement fluide sur les caractéristiques vibratoires d'une coque cylindrique anisotropique ouverte immergée et soumise simultanément à un écoulement externe et un écoulement interne.

Jyoti K.Sinha, Sandeep Singh et A.Rama Rao (2002) [3] ont publié un article sur les effets de masse ajoutée et d'amortissement ajouté des plaques perforées et immergées. La masse ajoutée sur une structure vibrant dans l'eau étant supposée égale à la masse d'eau équivalente à la force de réaction de cette plaque, ils supposent que cette masse peut être présentée par un volume d'eau cylindrique imaginaire autour de la plaque. Ils ont étudié ce modèle par éléments finis et effectué une validation expérimentale pour

l'estimation de la masse ajoutée d'une plaque perforée. Les trous ont été soustraits du volume cylindrique (Cf figure1).

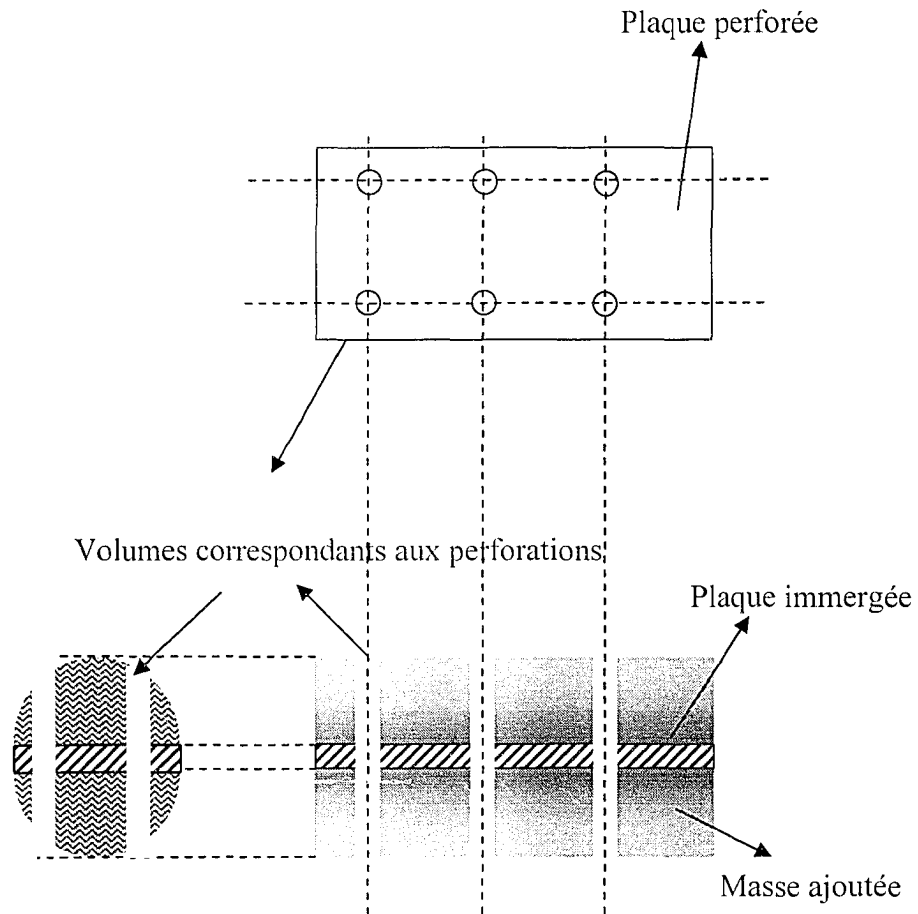


Figure 1 Masse ajoutée d'une plaque immergée dans l'eau

Axisa 2001 [4, 5] offre dans le quatrième volume de la série de modélisation des systèmes mécaniques, un excellent ouvrage sur les vibrations sous écoulement où il expose le phénomène d'interaction fluide-structure et met en évidence les effets d'amortissement ajouté et de masse ajoutée. Gibert 1988 [6] traite aussi le phénomène d'interaction fluide-structure et les sources d'excitations aléatoires. Conca, Planchard, Thomas, Vanninathan [7] offrent un ouvrage sur les problèmes mathématiques en couplage fluide-structure. L'analyse modale expérimentale est bien connue et maîtrisée

dans l'industrie, et ce grâce à la méthode d'identification dans le domaine spectral. Ainsi, la détermination des déformées modales, des fréquences de résonances et des amortissements (en utilisant soit un marteau d'impact ou un vibreur pour exciter la structure) est rendue du domaine du possible en mesurant les fonctions de transfert (FRF) en plusieurs endroits [8]. Ole [9, 10], LMS [11], Marc Thomas (2002) [12], et Ewins (2000) [13] présentent la technique d'analyse modale classique avec des exemples pratiques d'une manière détaillée. Aujourd'hui, de nouvelles méthodes sont introduites dans l'industrie et proposent de remplacer l'analyse modale traditionnelle. LMS [14] et Brüel&Kjaer (B&K) [15] offrent une technique dite l'analyse modale en opération -Operational Modal Analysis (OMA) - qui permet une identification précise des résonances, des déformées modales et des amortissements sans se donner aucun souci sur la mesure de l'excitation (i.e., sans avoir besoin ni de marteau ni de vibreur). Cette technique est basée sur l'identification dans le domaine temporel. Ainsi pour performer une OMA, tout ce qui est requis c'est de collecter les réponses temporelles en plusieurs points. Son point fort est de pouvoir tracer les modes propres sous les conditions réelles de fonctionnement. La technique permet donc de tester des structures en opération comme les voitures en circulation, les avions...etc., qui sont impossibles ou difficiles à exciter avec des forces extérieures connues à cause des conditions de réalisation pratique [16]. Ce type d'analyse est très intéressant car la qualité des mesures est améliorée par rapport à leur réalisme du moment où les essais se déroulent pratiquement dans des conditions réelles d'opération. Les mesures se font avec les véritables conditions aux limites et l'excitation est bien réelle. Ceci permet aussi de tester les machines en plein fonctionnement sans interrompre leurs cours de fonctionnement ce qui est très intéressant pour un processus de production. Aussi, on gagnerait du temps du moment où l'on n'a pas besoin de mesurer les forces. En plus on n'a besoin que d'accéléromètres pour effectuer une analyse modale sur site, donc l'on ne perd pas du temps pour la configuration du matériel. Par exemple pour analyser dans un laboratoire une structure donnée [15], il suffit d'aligner une série d'accéléromètres et de l'exciter avec une source quelconque.

En plus, d'autres solutions de mesure de vibration sans contact sont offertes. LMS et B&K offrent des techniques de mesures avec laser très adéquates pour l'analyse modale et adaptées pour des structures dont les points de mesures ont l'accès difficile.

Ces techniques d'analyse ont déjà fait l'objet de plusieurs recherches. Smail (1994) [17] dans sa thèse de doctorat de l'école centrale de Paris, présente une synthèse théorique avec des applications industrielles des techniques d'identification des structures vibrantes dans les domaines temporel et fréquentiel. Smail, M., M. Thomas, and A.A. Lakis, (1999) [18] ont publié un article sur l'utilisation de la modélisation ARMA pour la détection de fissures dans les rotors. Les mêmes auteurs (1999) [19] ont publié un article sur le model ARMA pour l'analyse modale. Bonnecase, D., M. Prevosto et A. Beneviste (1990) [20], Marple 1987 [21], Landau, I.D. et A. Besançon-Voda 2001 [22], Ljung, L. et T. Glad 1994 [23] font partie de plusieurs ouvrages qui décrivent avec détails des techniques d'identification dans le domaine temporel. CHI, M.-J.W.S. (1998) [24], dans son mémoire de maîtrise à l'école de technologie supérieure de Montréal présente l'identification des paramètres modaux d'une structure flexible en vue du contrôle adaptatif de ses vibrations.

## CHAPITRE 2

### VIBRATION D'UNE STRUCTURE DANS L'EAU

#### 2.1 Introduction

On verra dans ce chapitre, quelques éléments théoriques d'une structure vibrante dans un milieu fluide. On verra deux cas, le premier est celui d'une structure qui baigne dans un fluide sans écoulement, et le deuxième, est le cas d'une structure vibrante dans un milieu fluide avec écoulement. La structure étant en présence d'un fluide, il y a donc couplage fluide-structure dû à l'interaction entre les deux.

Ceci met en évidence l'apparition de termes supplémentaires dans les équations de mouvements des structures qui peuvent modifier celles-ci d'une façon importante. On parlera donc de masse ajoutée et d'amortissement ajouté. On verra donc, que la présence du fluide autour d'une structure, affecte les fréquences de résonances et l'amortissement de celle-ci.

##### 2.1.1 État plan de contrainte et de déformation

On rappelle dans ce qui suit, quelques notions élémentaires d'un état de contrainte et de déformation tridimensionnels, pour un massif homogène et isotrope. Dans ce cas, les composantes du tenseur de contraintes (figure 2), dans un système cartésien (x, y, z), est donné par :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$\sigma_i$  est la contrainte normale suivant la direction i ;

$\tau_{ij}$  : Contrainte de cisaillement dans le plan normal à la direction  $i$  suivant la direction  $j$ .

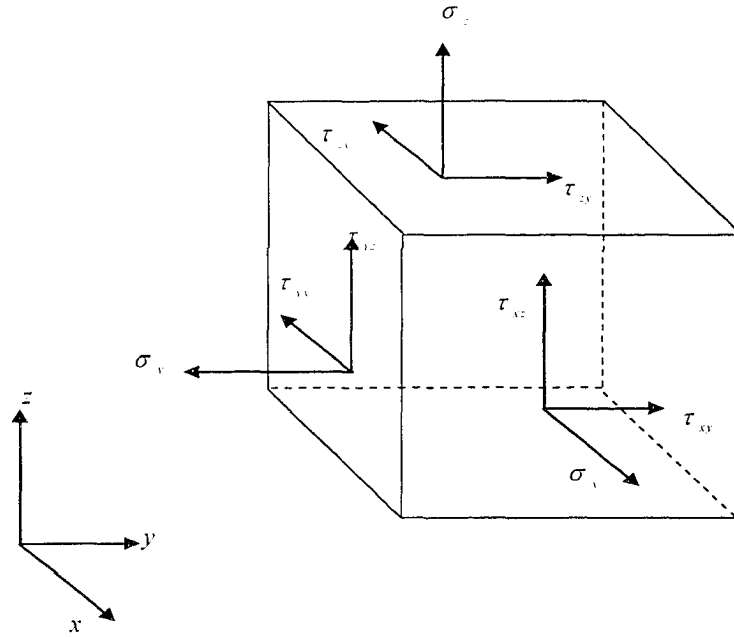


Figure 2 État de contrainte tridimensionnel d'un solide homogène isotrope

et le tenseur de déformation est donné par :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$\varepsilon_i$  : Déformation normale suivant la direction  $i$ ;

$\gamma_{ij}$  : Déformation angulaire dans le plan normal à la direction  $i$  et suivant la direction  $j$ .

On définit alors la loi de Hooke par :



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$\nu$  est le coefficient de poisson;

$E$  est le module d'Young;

$[D]$  est la matrice des propriétés du matériau.

## 2.2 Petits mouvements d'une structure en présence d'un fluide non visqueux sans écoulement

On considère une structure délimitée par un domaine  $ST$  et un fluide défini dans un domaine  $FL$ , les deux domaines ont une surface commune fluide-structure  $FS$ . On définit les petits mouvements de la structure par la variable de déplacement  $x_s$ .

Le fluide est défini soit par les variables de déplacements  $x_f$ , soit par des variables de pression  $p_r$ . On parle ainsi de système couplé fluide-structure.

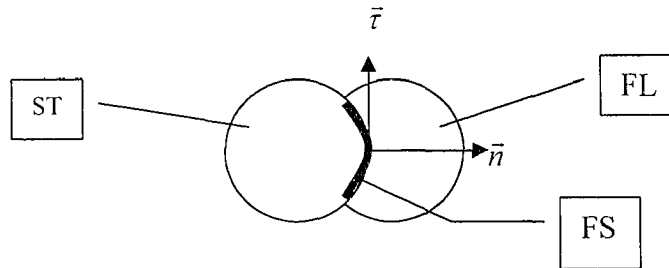


Figure 3 Système couplé fluide-structure

### 2.2.1 Formulation en variables de déplacement

Le couplage fluide structure se compose mathématiquement de deux équations à savoir :

- a) l'équation des petits mouvements de la structure, sous l'effet d'un champ de pression  $p_r$  du fluide s'exerçant sur le domaine  $FS$  :

$$[M]\{\ddot{x}_s\} + [K]\{x_s\} = 0 \quad (2.5)$$

avec comme condition aux limites sur  $FS$  :

$$[\sigma]\vec{n} = -p_r\vec{n} \quad (2.6)$$

- $\vec{n}$  est la normale unitaire extérieure (figure 3);
- $[\sigma]$  est le tenseur de contraintes dans la structure;
- $[M]$  est la matrice masse de la structure;
- $[K]$  est la matrice de raideur de la structure;
- $x_s$  est le déplacement de la structure.

- b) l'équation des petits mouvements de fluide sous l'effet du mouvement  $\dot{x}_s$  de la paroi FS est donnée par :

$$\text{grad}(p_f) + \rho_f \ddot{x}_f = 0 \quad (2.7)$$

$$p_f = -\rho_f c^2 \text{div}(x_f) \quad (2.8)$$

$\text{grad}(p_f)$  est le vecteur gradient de la pression  $p_f$  du fluide;

$\text{div}(x_f)$  est la divergence du mouvement de fluide  $x_f$ ;

$c$  est la célérité du son;

$\rho_f$  est la masse volumique du fluide au repos.

L'équation du système (2.7), est l'équation en question des petits mouvements du fluide. L'équation du système (2.8) caractérise la compressibilité du fluide, le terme  $\text{div}(x_f)$  représente la variation relative du volume du fluide, c'est une condition aux limites sur le domaine  $FS$ .

Le raccordement fluide-structure s'effectue en écrivant sur  $FS$  :

$$\dot{x}_f \cdot \vec{n} = \dot{x}_s \cdot \vec{n} \quad (2.9)$$

Cette équation s'appelle la condition de glissement du fluide qui stipule que la vitesse normale de la structure est égale à vitesse normale du fluide dans le cas d'un fluide parfait.

### 2.2.2 Équation du système fluide-structure (formulation en variables de pression)

Les petits mouvements du fluide sont définis par la pression  $p$ . La formulation est décrite par :

- a) les équations précédentes (2.5) et (2.6) des petits mouvements de la structure, sous l'effet d'un champ de pression  $p$  du fluide s'exerçant sur FS.
- b) l'équation du fluide qui s'obtient en éliminant  $x_r$  des équations (2.7) et (2.8) :

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho_f} \operatorname{grad}(p_r)\right) - \frac{1}{\rho_f c^2} \ddot{p}_r = 0 \quad (2.10)$$

avec :

$$\frac{\partial p_r}{\partial n} + \rho_f \ddot{x}_s \bar{n} = 0 \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) vient en appliquant la condition aux limites de glissement du fluide dans l'équation d'Euler d'un fluide compressible homogène sans la présence de la gravité [6, 25].

En supposant une forme harmonique du type  $\ddot{p}_r = \omega^2 p_r$  et  $\ddot{x}_s = \omega^2 x_s$  dans les équations (2.10) et (2.11), le système utilisé pour la recherche des modes propres du système vibratoire fluide-structure est le suivant :

$$\text{Pour la partie structure : } \begin{cases} ([K] - [M]\omega^2) \{X_s\} = 0 \\ [\sigma] \bar{n} = -p_r \bar{n} \quad \text{sur FS} \end{cases} \quad (2.12)$$

$X_s$  est le vecteur propre.

$$\text{Pour la partie fluide : } \begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho_f} \operatorname{grad}(p_r)\right) - \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_r = 0 \\ \frac{\partial p_r}{\partial n} - \rho_f \omega^2 X_s \bar{n} = 0 \quad \text{sur FS} \end{cases} \quad (2.13)$$

### 2.3 Fonctionnelle associée

La fonctionnelle permet de voir clairement les différentes grandeurs énergétiques du problème. On note aussi son importance dans les calculs en éléments finis où on cherche à la minimiser par rapport au paramètre d'intérêt. On en donne ici une forme explicite de la formulation en pression du problème fluide-structure.

La fonctionnelle associée à l'équation de structure est :

$$\phi_s = \underbrace{\frac{1}{2} \int_s [\sigma] \otimes [\varepsilon] dv}_{\text{énergie potentielle de déformation}} - \underbrace{\frac{1}{2} \omega^2 \int_s \rho_s (X_s)^2}_{\text{énergie cinétique}} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{FS} p_r X_s \bar{n} d(FS)}_{\text{Travail des pressions externes imposées à la structure}} \quad (2.14)$$

$[\varepsilon]$  est le tenseur de déformation ;

$\otimes$  est le produit tensoriel.

La fonctionnelle associée à l'équation du fluide est :

$$-\frac{1}{\omega^2} \phi_f = \underbrace{\frac{1}{2\omega^2} \int_s \frac{1}{\rho_f} (\text{grad}(p_r))^2 dv}_{\text{énergie cinétique}} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_s \frac{1}{\rho_f c^2} p_r^2}_{\text{énergie potentielle de compressibilité}} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{FS} p_r X_s \bar{n} d(FS)}_{\text{Travail de pression sur FS.}} \quad (2.15)$$

La fonctionnelle du système couplé est :

$$\phi_c = U_s + C_s + U_f + C_f - \underbrace{\int_{FS} p_r X_s \bar{n} d(FS)}_{\text{terme de couplage}} \quad (2.16)$$

Les deux premiers termes sont l'énergie potentielle de déformation  $U_s$  et l'énergie cinétique  $C_s$  de la structure, les troisième et quatrième termes sont l'énergie potentielle de compressibilité  $U_f$  et l'énergie cinétique  $C_f$  du fluide. Le dernier terme  $\int_{FS} p_r X_s \bar{n} d(FS)$  est le terme de couplage fluide-structure.

## 2.4 Cas d'un fluide incompressible

Dans le cas particulier d'un fluide incompressible, les termes en  $(1/c^2)$  n'existent pas car l'équation de compressibilité du fluide du système d'équation (2.3) n'a pas lieu, dans ce cas :

La fonctionnelle du système couplé se simplifie comme suit :

$$\phi'_c = \frac{1}{2} \int_s [\sigma] \otimes [\varepsilon] dv - \omega^2 \left[ \frac{1}{2} \int_s \rho_s (X_s)^2 - \frac{1}{2} \int_s \frac{1}{\rho_f} (\text{grad}(-\frac{p_r}{\omega^2}))^2 dv - \underbrace{\int_{FS} -\frac{p_r}{\omega^2} X_s \bar{n} d(FS)}_{\text{terme de couplage}} \right] \quad (2.17)$$

Le système utilisé pour la recherche des modes propres du système vibratoire fluide structure devient :

Pour la partie structure ( $X_s$  est le vecteur propre) :

$$\begin{cases} (K - M\omega^2)X_s = 0 \\ [\sigma]\bar{n} = p_r \bar{n} \quad \text{sur } FS \end{cases} \quad (2.18)$$

Pour la partie fluide :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho_f} \operatorname{grad}\left(-\frac{p_1}{\omega^2}\right)\right) = 0 \\ \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial p_1}{\partial n} + \rho_f \omega^2 X_s \bar{n} = 0 \end{cases} \quad \text{sur FS} \quad (2.19)$$

Par ailleurs l'on démontre [6] que le terme :

$$\frac{1}{2} \omega^2 \int_{FS} -\frac{p_1}{\omega^2} X_s \bar{n} dFS = -\frac{1}{2} \omega^2 \int_F \rho_f X_i^2 dv \quad (2.20)$$

représente aussi l'énergie cinétique du fluide. Ainsi les deux derniers termes de la fonctionnelle représentent l'énergie cinétique du fluide, donc le fluide est purement inertiel.

## 2.5 Effet du fluide sans écoulement sur une structure vibrante

La présence du fluide modifie les caractéristiques vibratoires de la structure. La fonctionnelle met en évidence deux aspects importants du fluide, à savoir le terme d'inertie (énergie cinétique) et le terme de compressibilité (énergie potentielle). On verra dans ce qui suit, pour le cas d'un fluide incompressible, l'effet de l'inertie sur les caractéristiques vibratoires de la structure vibrante dans un fluide incompressible.

### 2.5.1 Mise en évidence de la matrice de masse ajoutée

En considérant le système dans la base modale, les modes propres de la structure sont  $X_i$ . Dans cette base, la partie structure du système d'équations (2.18) est diagonalisée. Les déplacements de la structure s'écrivent :

$$x_s = \sum_i a_{mi}(t) X_i \quad (2.21)$$

où  $a_{mi}(t)$  sont les déplacements généralisés dans la base modale.

Le système d'équation découplé dans la base modale s'écrit :

$$[m_i]\{\ddot{a}_m\} + [m_i\omega_i^2]\{a_m\} = \{f_{gi}\} \quad (2.22)$$

où  $\{a_m\}$  est le vecteur des composantes des déplacements généralisés  $a_{mi}(t)$  et  $f_i$  est la force généralisée pour le mode  $i$  qui résulte de la pression du fluide sur le domaine fluide-structure (FS), calculée en intégrant la deuxième équation du système (2.19).

On tire l'expression de la pression  $p_r$  à partir du système d'équation (2.21). On en déduit l'expression de la force généralisée  $f_{gi}$  [6] :

$$\{F_g\} = -[m_a]\{\ddot{a}_m\} \quad (2.23)$$

$\{F_g\}$  est le vecteur des forces généralisées  $f_{gi}$ .

En remplaçant celle-ci dans l'équation (2.24) on obtient :

$$\{[m_i] + [m_a]\}\{\ddot{a}_m\} + [m_i\omega_i^2]\{a_m\} = 0 \quad (2.24)$$

On voit bien que l'effet du fluide sans écoulement sur la structure est la modification de la matrice masse de la structure. En effet, une matrice  $[m_a]$  dite matrice de masse ajoutée est additionnée dans le terme d'inertie de l'équation (2.24).

Ainsi, quand la structure vibre dans le fluide, celui-ci est entraîné par la structure elle-même, ce qui augmente l'énergie cinétique du système couplé. On dit alors que le fluide



apporte une masse ajoutée [4]. Nous avons parlé de fluide non visqueux mais ce phénomène est aussi présent dans le cas d'un fluide visqueux.

Et plus la densité du fluide se compare à celle de la structure, plus l'importance de la masse ajoutée est significative car sa fraction devient importante dans la masse totale. À titre d'exemple, dans le cas d'une structure immergée dans l'eau, la masse ajoutée est considérable. Cependant elle est négligeable si le fluide en question est un gaz. On note aussi que la masse ajoutée a comme effet l'augmentation de la masse effective de la structure et donc la réduction des fréquences de résonance de la structure. En effet, le système (2.24) est non diagonalisé, sa diagonalisation conduit à un ensemble de nouveaux vecteurs propres et de nouvelles fréquences propres qui caractérisent le système fluide-structure. La figure 4 montre la masse ajoutée pour différentes sections dans un large réservoir ( $\rho$  est la masse volumique du fluide) [26].

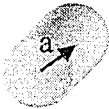



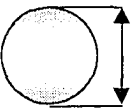
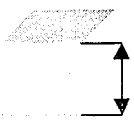
Géométries	Schémas	Masse ajoutée
cylindre circulaire de rayon $a$ de longueur $b$		$\rho\pi a^2 b$
Section carrée de cotés $2a$ de longueur $b$	$2a$ 	$1.51\rho\pi a^2 b$
Section elliptique de longueur $b$	$2a$ 	$\rho\pi a^2 b$
Plaque plane De largeur $a$ et de longueur $b$ .	$2a$ 	$\rho\pi a^2 b$
Sphère de rayon $a$	$2a$ 	$\frac{2}{3}\rho\pi a^3$
Cube de cotés $a$ .	$a$ 	$0.7\rho a^3$

Figure 4 Masse ajoutée pour différentes géométries pour une accélération latérale de gauche à droite

## 2.6 Exemple didactique

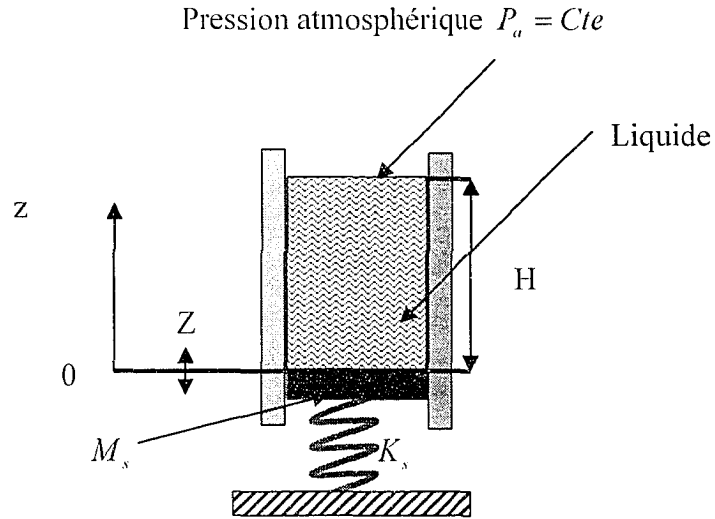


Figure 5 Système piston fluide

Le système le plus simple que l'on puisse supposer [4], se compose d'un système couplé entre une colonne de liquide de hauteur  $H$  et de masse  $M_f$  limitée en haut par une pression atmosphérique constante  $P_a$  contenue dans un cylindre de section  $S$  (figure 5) et un piston rigide de masse  $M_s$  maintenu par un ressort de raideur  $K_s$  dont  $Z$  désigne son déplacement vibratoire selon l'axe  $z$  autour de sa position d'équilibre. On sait qu'en l'absence du liquide, la pulsation propre du système masse ressort est donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{K_s}{M_s}} \quad (2.25)$$

La colonne fluide étant incompressible, elle se déplace avec le piston comme un corps rigide. Donc il est tout à fait clair dans ce cas que l'effet inertiel du fluide apporte une masse ajoutée  $M_a$  égale à sa masse physique  $M_f$ , d'où on déduit intuitivement la pulsation propre du système couplé fluide-structure comme suit :

$$\omega = \sqrt{\frac{K_s}{M_s + M_r}} \quad (2.26)$$

### 2.6.1 Mise en évidence

Les oscillations du système fluide-structure sont régies par les équations d'équations (2.12) et (2.13).

#### a) Système masse-ressort

En considérant la pression fluide  $p_r(t, z)$  comme une force extérieure, et en couplant la première et la deuxième équation du système (2.12) on écrit :

$$K_s Z + M_s \ddot{Z} = -p_r(t, z)|_{z=0} S \quad (2.27)$$

$p_r(t, z)$  : Fonction du temps  $t$  et de la hauteur  $z$ .

Cette équation formule un couplage fluide piston en présentant le chargement du fluide sur la structure.

#### b) Colonne fluide

La première équation du système (2.13) s'écrit comme :

$$\frac{\partial^2 p_r}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p_r}{\partial z} = f(t) \Rightarrow p_r(t, z) = f(t)z + \text{cte} \quad (2.28)$$

La deuxième équation du système (2.13) s'écrit comme suit :

$$\left. \frac{\partial p_r}{\partial z} \right|_{z=0} = -\rho_0 \ddot{Z} \quad (2.29)$$

Cette équation présente la condition de glissement.

On en déduit que :

$$f(t) = -\rho_0 \ddot{Z} \quad (2.30)$$

donc :

$$p_r(t, z) = f(t)z + \text{cte} = -\rho_0 \ddot{Z}z + \text{cte} \quad (2.31)$$

Avec comme condition :  $p_r(t, z)|_{z=H} = 0$  (la pression du fluide nulle à la surface libre);

En utilisant cette condition de surface libre, on a finalement :

$$p_r(t, z) = \rho_0(H - z)\ddot{Z}(t) \quad (2.32)$$

d'où :

$$K_s Z + M_s \ddot{Z} = -\rho_0 H \ddot{Z} = -M_r \ddot{Z} \quad (2.33)$$

où  $M_s = \rho_0 HS$ . Cette équation considère que le piston est un système extérieur par rapport au fluide dont la pression devient une force extérieure la fréquence propre de ce système est :

$$\omega = \sqrt{\frac{K_s}{M_s}}$$

Mais si on considère le système couplé fluide-structure, le second membre de l'équation deviendra une force intérieure au système ce qui permet de le rapporter à gauche, on obtient :

$$K_s Z + (M_s + M_f) \ddot{Z} = 0 \quad (2.34)$$

On a donc une masse ajoutée qui est la masse du fluide  $M_a = M_f$  d'où la fréquence propre du système couplé :

$$\omega' = \sqrt{\frac{K_s}{M_s + M_f}}$$

## 2.7 Estimation de la masse ajoutée pour un problème tridimensionnel

Les expressions analytiques de la masse ajoutée dans les cas des problèmes tridimensionnelles sont presque inexistantes [6]. Néanmoins, il est possible de définir deux problèmes bidirectionnels dans deux plans perpendiculaires entre eux et à la surface de la paroi vibrante et de déterminer pour chacun d'eux une masse ajoutée  $m_x$  et  $m_y$  (une pour chaque direction). La masse ajoutée pour le problème tridimensionnel est alors estimée par :

$$\frac{1}{m} \approx \frac{1}{m_x} + \frac{1}{m_y} \quad (2.35)$$

La référence [6] présente une démonstration générale de cette approximation. À titre d'exemple, on considère le cas d'une plaque plane tridimensionnelle dans la figure 6, qui se translate perpendiculairement par rapport à son plan (suivant la direction  $z$ ) :

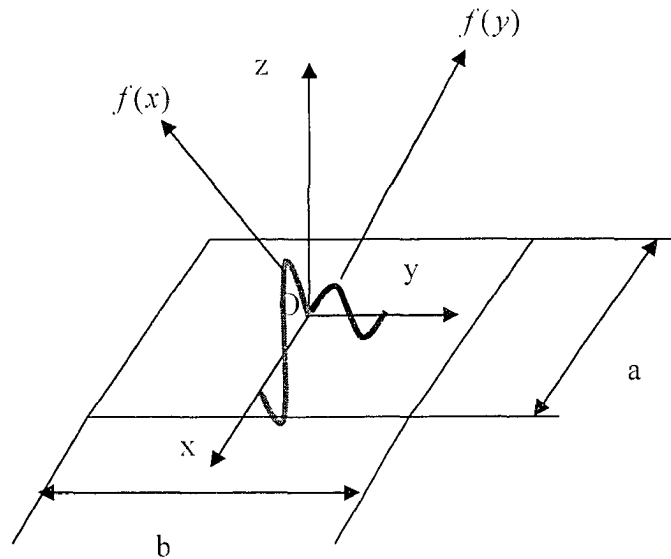


Figure 6 Plaque plane

On divise le problème tridimensionnel en deux problèmes à deux dimensions suivants :

- a) Le problème suivant le plan ( $xOz$ ), déplacement  $f(x)$  :

La masse ajoutée suivant ce plan en se référant aux relations dans la figure 4 est :

$$m_x = \rho \pi a^2 b \quad (2.36)$$

- b) Le problème suivant le plan ( $yOz$ ), déplacement  $f(y)$  :

La masse ajoutée suivant ce plan en se référant aux relations dans la figure 4 est :

$$m_y = \rho \pi b^2 a \quad (2.37)$$

On a donc :

$$\frac{1}{m} \approx \frac{1}{m_x} + \frac{1}{m_y} = \frac{1}{\rho \pi a^2 b} + \frac{1}{\rho \pi b^2 a} \quad (2.38)$$

La masse ajoutée en trois dimensions est donc estimée à :

$$m = \lambda \rho \pi a^2 b \quad (2.39)$$

$$\lambda = \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{b}\right)} \quad (2.40)$$

Ceci est une approximation grossière mais qui permet d'estimer l'ordre de grandeur de la masse ajoutée pour le cas à trois dimensions.

## 2.8 Structure vibrante dans un fluide en écoulement

Une structure vibrante dans un fluide en écoulement permanent engendre des fluctuations de pression dans le fluide qui réagissent à leur tour sur la structure. Le fluide en écoulement exerce des forces de pression sur la structure. Dans ce cas, l'expression des forces généralisées dans la base modale est donnée par [6] :

$$F = -[m_a]\{\ddot{a}_m\} + \frac{2}{\ell}[m']V_0\{\dot{a}_m\} + \frac{1}{\ell^2}\left\{[m'']V_0^2 + \frac{1}{\rho_f}[m''']P_0\right\}\{a_m\} \quad (2.41)$$

$[m_a]$  : Matrice de masse ajoutée ;



$\ell$  : Longueur de référence (exemple : longueur de conduite) [6];

$V_0$  : Vitesse d'écoulement du fluide;

$P_0$  : Pression de l'écoulement du fluide;

$[m],[m'],[m''],[m''']$  sont des matrices qui ont la dimension d'une masse.

L'équation (2.43), montre que l'écoulement engendre deux termes additionnels :

- a) Des termes modifiant l'amortissement de la structure :  $V_0 \dot{A}$ .
- b) Des termes modifiant la raideur de la structure :  $V_0^2 A$  et  $\frac{1}{\rho_f} P_0 A$ .

On définit les deux ordres de grandeur des rapports suivants :

$$\frac{\text{Terme d'amortissement additionnel}}{\text{inertie du fluide}} \approx \frac{V_0}{\omega_0 \ell} \quad (2.42)$$

$$\frac{\text{Terme de raideur}}{\text{inertie du fluide}} \approx \left( \frac{V_0}{\omega_0 \ell} \right)^2 \quad (2.43)$$

Dans la plupart des cas [6], au voisinage d'une résonance  $\omega_0$ , on a  $\frac{V_0}{\omega_0 \ell} \ll 1$ , ce qui

permet de négliger le terme  $\left( \frac{V_0}{\omega_0 \ell} \right)^2$ . L'écoulement est uniquement une contribution

supplémentaire à l'amortissement. On parle donc d'amortissement ajouté. On note que l'amortissement ajouté peut être positif ou négatif. Ce dernier cas constitue une situation dangereuse au voisinage d'une résonance. On note aussi qu'en l'absence de l'écoulement ( $V_0 = 0$  et  $P_0 = 0$ ), l'équation (2.43) se confond avec l'équation (2.25). On tombe dans le cas d'un fluide sans écoulement qui a pour effet la masse ajoutée.

## CHAPITRE 3

### IDENTIFICATION DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

#### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on décrira brièvement la technique d'analyse modale expérimentale dans le domaine fréquentiel utilisée dans la pratique pour la détermination des fréquences de résonances, des amortissements et des modes d'une structure vibrante à partir de la mesure des fonctions de transferts. On parle donc d'identification dans le domaine fréquentiel.

#### 3.2 Identification des paramètres modaux sans bruit de mesure

Ce cas mérite une considération fondamentale. On considère le cas d'un système dont l'entrée et la sortie ne sont pas contaminées par un bruit de mesure. La transformée de Fourier  $Y(j\omega)$  de la réponse d'un système est donnée par :

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega) \quad (3.1)$$

où  $U(j\omega)$  est la transformée de Fourier de l'entrée donnée par :

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.2)$$

On en déduit la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du système, qui est la réponse d'un système dont l'entrée est une impulsion, par la transformée de Fourier inverse de la FRF comme suit :

$$h(t) = F^{-1}[H(j\omega)] \quad (3.3)$$

$H(j\omega)$  est la fonction de transfert complexe (FRF) du système dont le module  $|H(j\omega)|$  représente le gain du système et l'argument  $\phi(H(j\omega))$  représente le déphasage entre l'entrée et la sortie. Ainsi, pour une entrée sinusoïdale dont la fréquence est  $\omega$  :

$$u(t) = \sin(\omega t) \quad (3.4)$$

La sortie est une réponse fréquentielle :

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(H(j\omega))) \quad (3.5)$$

La représentation de l'amplitude et de la phase en fonction de la fréquence s'appelle le diagramme de Bode (figure 7).

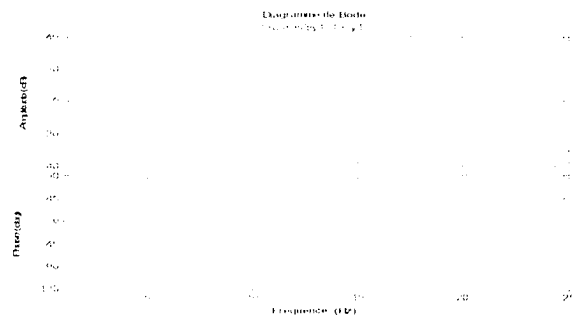


Figure 7 Diagramme de Bode

### 3.3 Identification des paramètres modaux avec bruit de mesure

Dans le cas où l'on a un bruit de mesure, on peut avoir affaire au cas le plus complexe rencontré dans la pratique, où l'excitation et la réponse d'un système sont aléatoires. Dans ce cas, on ne peut pas parler de transformée de Fourier. On utilise plutôt une autre

approche pour mesurer les fonctions de transfert du système. On introduit deux concepts pour décrire le signal aléatoire à savoir :

- La fonction d'auto-covariance qui décrit la structure du signal dans le temps définie pour un signal  $y(t)$  par :

$$R_{yy}(\tau) = E(y(t)y(t+\tau)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t+\tau)dt \quad (3.6)$$

$R_{yy}(\tau)$  représente l'espérance mathématique (ou bien la moyenne) du produit  $y(t)y(t+\tau)$ , qui décrit la relation entre une valeur du signal  $y(t)$  à l'instant  $t$  et une autre valeur du même signal à l'instant  $(t+\tau)$ . La fonction d'auto-covariance ne dépend que du paramètre  $\tau$ .

- La densité de la puissance spectrale (DPS) du signal  $y(t)$ ,  $S_{yy}$ , donnée par la relation suivante :

$$S_{yy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.7)$$

$S_{yy}$  représente la répartition fréquentielle de la puissance moyenne du signal [27]. La DPS d'un signal est la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-covariance.

On définit la relation entre la DPS de l'entrée d'un système  $S_{uu}$  et la DPS de sa sortie  $S_{yy}$  comme suit :

$$S_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{uu}(\omega) \quad (3.8)$$

Cette relation ne fournit l'information que sur l'amplitude de la fonction de transfert  $H(j\omega)$  du système.

D'autre part, on définit la fonction d'auto-covariance croisée pour deux signaux  $y(t)$  et  $u(t)$  comme suit :

$$R_{yu} = E(y(t)u(t + \tau)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)u(t + \tau) dt \quad (3.9)$$

Et on définit aussi la densité de puissance spectrale croisée qui est la transformée de Fourier de l'auto-covariance croisée comme suit :

$$S_{yu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.10)$$

On peut alors définir les deux relations suivantes :

$$S_{yu}(\omega) = H(j\omega)S_{uu}(\omega) \quad (3.11)$$

et

$$S_{yy}(\omega) = H(j\omega)S_{yu}(\omega) \quad (3.12)$$

Ces dernières relations sont intéressantes dans la pratique car elles fournissent des informations sur l'amplitude et aussi sur la phase de la fonction de transfert  $H(j\omega)$  du système dont l'entrée (l'excitation) et la sortie (la réponse) sont respectivement  $u(t)$  et  $y(t)$ , du moment où la fonction de transfert donnée ici est un nombre complexe.

### 3.4 La cohérence

L'analyseur spectral calcule les différentes DPS des sorties provenant des différents capteurs. En utilisant les relations (3.11) et (3.12), on calcule la même fonction de transfert désirée  $H(j\omega)$  de deux manières différentes. Pour un signal pur, les deux quantités sont les mêmes donc leur rapport est égal à l'unité. Si le signal est bruité, il est donc question de déterminer le meilleur rapport entre les deux.

Le rapport entre les deux fonctions de transferts calculées ainsi s'appelle la cohérence. Celle-ci s'exprime comme suit :

$$\gamma^2 = \frac{|S_{yn}(\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)S_{yy}(\omega)} \quad (3.13)$$

Cette fonction varie entre 0 et 1, elle indique la consistance de la mesure de la fonction de transfert  $H(j\omega)$ . La cohérence représente donc la mesure du bruit dans le signal.

Ainsi si :

$\gamma^2 = 0$ , cela veut dire que le signal mesuré ne contient que du bruit.

$\gamma^2 = 1$ , cela veut dire que le signal est pur (sans aucun bruit de mesure).

Dans la pratique, la cohérence est représentée en fonction de la fréquence, il faut que  $\gamma^2 \geq 0.75$  proche des fréquences de résonances pour valider la mesure. Il est normal qu'aux anti-résonances de ne pas satisfaire cette condition puisque la structure ne répond pas à l'excitation.

### 3.5 Extraction des paramètres modaux

Le but de l'analyse modale expérimentale est la mesure des fréquences de résonance, des taux d'amortissement et des amplitudes des modes pour chaque fréquence pour une structure.

#### 3.5.1 Mesure des fréquences de résonances

On effectue l'analyse de l'amplitude de la fonction de transfert et de sa phase en fonction de la fréquence (figure 8). La résonance se caractérise par une amplitude maximale et un changement de phase de :

- $90^\circ \pm 180^\circ$  : Si la mesure s'effectue en déplacement ou en accélération.
- $0^\circ \pm 180^\circ$  : Si la mesure s'effectue en vitesse.

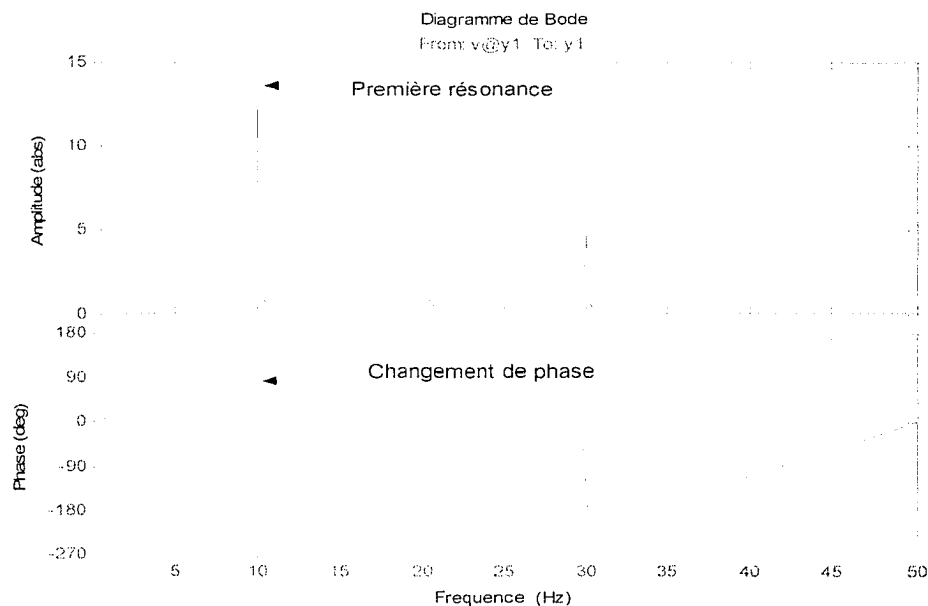


Figure 8 Mesure des fréquences de résonance

### 3.5.2 Mesure des amortissements

La mesure de l'amortissement peut s'effectuer selon plusieurs méthodes. On en présentera deux parmi elles à savoir la méthode de la bande passante et la méthode de la partie réelle de la fonction de transfert (l'inertance).

#### 3.5.2.1 Bande passante (méthode des 3-dB ou de demi puissance)

On définit la bande passante par rapport à la fréquence de résonance  $f_n$  (figure 9) par l'intervalle fréquentiel  $\Delta f$  tel que :

$$\Delta f = (f_2 - f_1) \quad (3.14)$$

Si on utilise une échelle logarithmique pour la représentation de la fonction de transfert en fonction de la fréquence on a (figure 9) :

$$|H(f_2)|_{dB} = |H(f_1)|_{dB} = |H(f_n)|_{dB} - 3(dB) \quad (3.15)$$

Ainsi on démontre que le taux d'amortissement  $\xi$  est égal à :

$$\xi = \frac{(f_2 - f_1)}{2f_n} = \frac{\Delta f}{2f_n} \quad (3.16)$$



Calcul du taux d'amortissement avec la méthode des 3 dB.

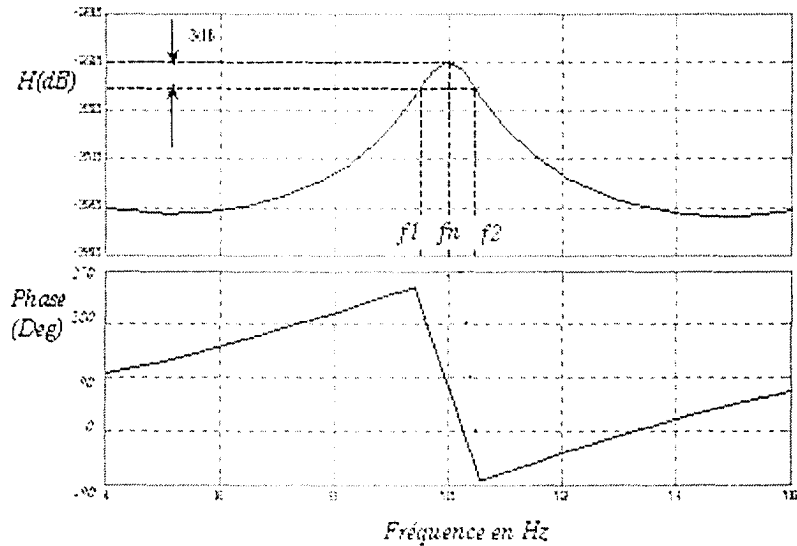


Figure 9 Méthode des 3dB (échelle logarithmique)

Une atténuation de 3 dB dans une échelle logarithmique correspond dans une échelle linéaire à une atténuation de :

$$\frac{|H(f_n)|}{\sqrt{2}}$$

### 3.5.2.2 Méthode de la partie réelle de la fonction de transfert d'inertance

On a déjà vu que la fonction de transfert  $|H(j\omega)|$  est un nombre complexe. On peut donc représenter des parties réelle et imaginaire en fonction de la fréquence (figure 10). Cette représentation permet de voir que les fréquences  $f_2$  et  $f_1$  de la bande passante correspondent aux valeurs maximale et minimale de la partie réelle de la fonction de transfert  $H(j\omega)$  en inertance ou en compliance. La fréquence de résonance  $f_n$  correspond à la valeur maximale de la partie imaginaire de  $H(j\omega)$ .

De la même façon que la relation (3.16), on évalue le taux d'amortissement comme suit :

$$\xi = \frac{(f_2 - f_1)}{2f_n}$$

Fréquence de résonance (quatrième mode)

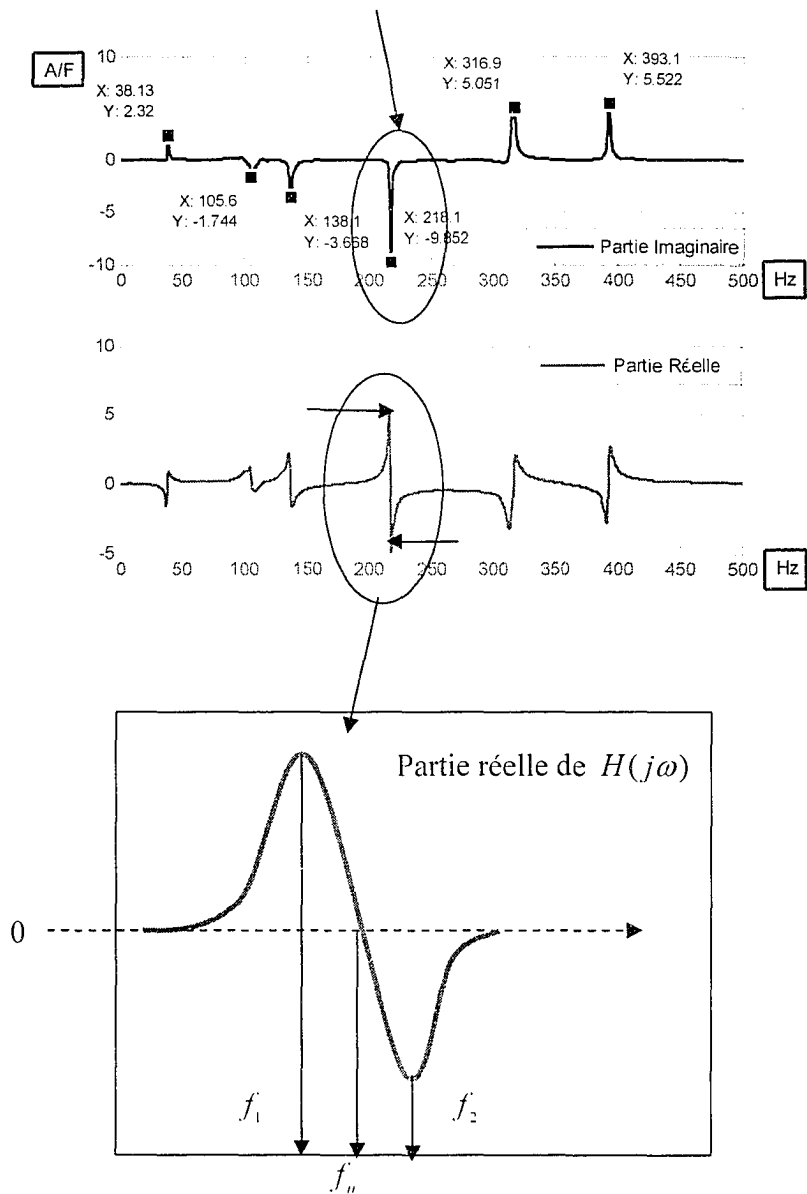


Figure 10 Calcul du taux d'amortissement par la méthode de la partie réelle de l'inertance  $H(j\omega)$

### 3.5.3 Mesure des modes

On considère l'équation de mouvement suivante [12, 28, 29] :

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = f(t) \quad (3.17)$$

Dans le cas d'un mouvement harmonique on a :

$$x(t) = \{U\} e^{i\omega t} \quad (3.18)$$

et

$$f(t) = \{F\} e^{i\omega t} \quad (3.19)$$

où :  $\{U\}$  et  $\{F\}$  sont les amplitudes des déplacements  $x(t)$  et force  $f(t)$  mesurés.

$[M]$  : Matrice de masse

$[K]$  : Matrice de raideur

$[C]$  : Matrice d'amortissement

On obtient donc :

$$[K - \omega^2 M + i\omega C]\{U\} = \{F\} \Rightarrow \{U\} = [K - \omega^2 M + i\omega C]^{-1} \{F\} \quad (3.20)$$

Par ailleurs, les matrices de raideur  $[K]$  et d'amortissement  $[C]$  s'expriment en fonction des modes normalisés par rapport à l'unité  $[P]$  (ie :  $[P][P]^T = [I]$ ) comme suit [12, 28, 29] :

$$[K] = [M]^{1/2} [P] [\omega_n^2] [P]^T [M]^{1/2} \quad (3.21)$$

$$[C] = [M]^{1/2} [P] [2\xi\omega_n^2] [P]^T [M]^{1/2} \quad (3.22)$$

Où  $\xi$  est le taux d'amortissement et  $\omega_n$  est la fréquence naturelle.

On note que ceci suppose qu'on a un modèle d'amortissement proportionnel qui s'exprime comme une combinaison linéaire entre la matrice masse et la matrice rigidité :

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.23)$$

En remplaçant par ces expressions et en posant :

$$[S] = [M]^{1/2} [P] \quad (3.24)$$

et

$$\{U\} = H(\omega)F \quad (3.25)$$

On obtient :

$$H(\omega) = [S]^{-T} \left[ \frac{1}{\omega_{ni}^2 - \omega^2 + 2i\xi_i \omega \omega_{ni}} \right] [S]^{-1} \quad (3.26)$$

$[S]^T = [P]^T [M]^{-1/2}$  représentant le mode  $\{U\}_{n+1}$  ( $n$  est le nombre de degrés de liberté) on peut écrire comme suit :

$$H(\omega) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{U_i U_i^T}{(\omega_i^2 - \omega^2) + i(2\xi_i \omega \omega_i)} \right] \quad (3.27)$$

Le produit  $\{U_i\}_{n+1} \{U_i\}_{n+1}^T$  est une matrice  $n \times n$ .

$H(\omega)$ , est donc une matrice  $n \times n$  et l'élément  $H_{sr}(\omega)$  de la ligne  $s$  et la colonne  $r$  de cette matrice représente la fonction de transfert  $H_{sr}$  telle que :

$$H_{sr}(\omega) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{[U_i U_i^T]_{sr}}{(\omega_i^2 - \omega^2) + i(2\xi_i \omega \omega_i)} \right] = \frac{U_s}{f_r} \quad (3.28)$$

$H_{sr}(\omega)$  représente la fonction de transfert entre une entrée (excitation) à un point  $r$  et une sortie (réponse) à un point  $s$ .

Si on suppose que les modes de la structure sont espacés [30], la somme de l'équation (3.31) évaluée à une fréquence de résonance sera dominée par le terme qui correspond à cette fréquence elle-même ( $\omega = \omega_i$ ).

On a donc l'approximation suivante à la fréquence de résonance  $\omega = \omega_i$  :

$$|H_{sr}(\omega_i)| = \frac{|[U_i U_i^T]_{sr}|}{\underbrace{(\omega_i^2 - \omega_i^2) + i(2\xi_i \omega_i \omega_i)}_{=0}} = \frac{|[U_i U_i^T]_{sr}|}{2\xi_i \omega_i^2} = H_{sr}(\omega) \quad (3.29)$$

d'où [28] :

$$\left| [U_i U_i^T] \right|_{sr} = \left| 2\xi_i \omega_i^2 \right| |H_{sr}(\omega_i)| \quad (3.30)$$

Avec  $H_{sr}(\omega_i)$  est la fonction de transfert au  $i^{ème}$  mode, mesurée au point  $s$  sous l'action de la force exercée au point  $r$ . On rappelle qu'elle suppose que l'amortissement est proportionnel, que les modes sont largement espacés.

L'équation (3.30) relie les paramètres mesurés à savoir, l'amortissement  $\xi_i$ , la fréquence de résonance  $\omega_i$  au mode  $i$  et l'amplitude de la fonction de transfert à cette fréquence  $H(\omega_i)$ . Elle donne la forme du  $i^{ème}$  mode propre de la structure. Son signe algébrique est donné par le signe de la phase de la fonction de transfert au même mode comme suit :

- $\pm 90$  si on mesure le déplacement ou l'accélération;
- $\pm 180$  si on mesure la vitesse.

La mesure de  $\left| U_i U_i^T \right|_{sr}$  est un élément de la matrice. Si on désire mesurer  $n$  modes, on doit prévoir  $n$  points de mesures au minimum. On a deux possibilités pour réaliser cette condition, soit on mesure l'excitation en un point et on mesure la réponse aux autres points, soit on mesure la réponse en un point et on mesure l'excitation aux autres points.

La matrice a la forme suivante[9, 10] :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \cdots & H_{2n} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & \cdots & H_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & H_{n3} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Si on examine le cas d'un mode à trois degrés de liberté, ceci peut être formulé comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ a_{m3} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\{U\}^T = \{a_{m1} \quad a_{m2} \quad a_{m3}\} \quad (3.33)$$

où  $a_{mi}$  ( $i=1, 2, 3$ ) sont les amplitudes des modes.

Le produit nous donne :

$$[UU^T] = \begin{bmatrix} a_{m1}^2 & a_{m1}a_{m2} & a_{m1}a_{m3} \\ a_{m2}a_{m1} & a_{m2}^2 & a_{m2}a_{m3} \\ a_{m3}a_{m1} & a_{m3}a_{m2} & a_{m3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |U_1U_1^T|_{11} & |U_1U_1^T|_{12} & |U_1U_1^T|_{13} \\ |U_1U_1^T|_{21} & |U_1U_1^T|_{22} & |U_1U_1^T|_{23} \\ |U_1U_1^T|_{31} & |U_1U_1^T|_{32} & |U_1U_1^T|_{33} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

La matrice  $[UU^T]$  est symétrique, la connaissance d'une ligne ou d'une colonne suffit pour déduire tous les autres éléments de la matrice. Les termes de la diagonale sont les points d'impédance possibles où le point de mesure de l'excitation se confond avec le point de mesure de la réponse.

Si on mesure les fréquences de résonance  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , les amortissements  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , la fonction de transfert  $H_{11}$  au point d'impédance 1, les fonctions de transfert  $H_{21}$  et  $H_{31}$  des deux autres points (correspondants aux trois degrés de libertés) et on pourra déduire d'après l'équation (3.30) les composantes  $a_{m1}$ ,  $a_{m2}$  et  $a_{m3}$  comme suit [28] :

$$a_{m1}^2 = 2\xi_1\omega_1 |H_{11}|$$

$$a_{m1}a_{m2} = 2\xi_2\omega_2 |H_{21}|$$

$$a_{m1}a_{m3} = 2\xi_3\omega_3 |H_{31}|$$

### 3.6 Considérations pratiques

#### 3.6.1 L'excitation

Le spectre de l'excitation choisie doit couvrir toutes les fréquences pour pouvoir exciter toutes les fréquences de résonance de la structure analysée.

Une excitation par une impulsion répond théoriquement à cette condition. En effet, le spectre d'une impulsion (fonction Dirac) couvre infiniment toutes les fréquences (figure 11).



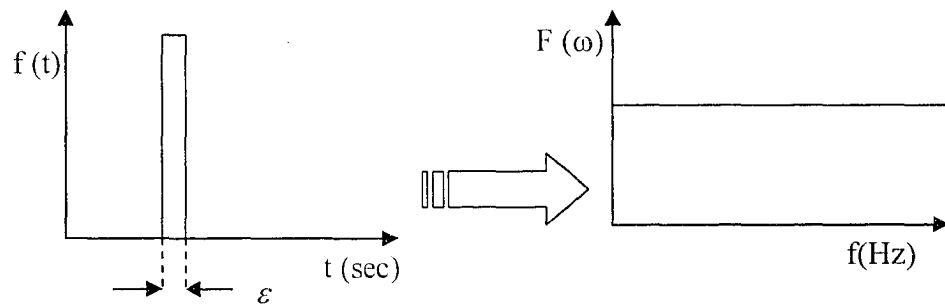


Figure 11 Excitation par une impulsion (fonction de Dirac)

Dans la pratique, une impulsion peut être réalisée par un coup de marteau d'impact, mais la condition théorique n'est pas satisfaite du moment où le spectre de l'impact, dépendamment du type du choc réalisé, est atténué sur l'axe de fréquence. On définit alors comme gamme utile du spectre de l'excitation, la gamme de fréquence qui donnerait une réponse acceptable.

Dans le cas d'un marteau d'impact, on définit la fréquence de coupure  $f_c$  lorsque l'atténuation atteint 10 dB. La largeur de la gamme dépend de l'embout du marteau choisi. Plus l'embout est dur plus la gamme opérationnelle sera grande (figure 12).

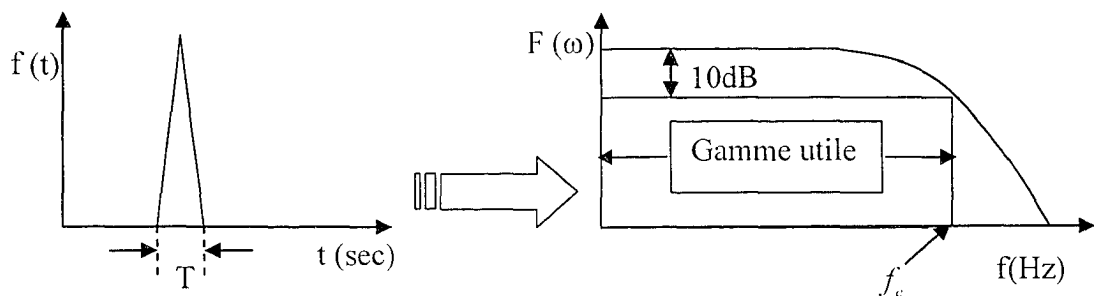


Figure 12 Gamme utile d'un impact

$F(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $f(t)$ .

### 3.6.2 Système libre-libre

Quand un système est libre-libre, cela signifie qu'il flotte dans l'espace sans liaison aucune à la terre. Cette configuration fait que la structure admet théoriquement un mouvement de corps rigide à la fréquence zéro. Une analyse modale d'une structure libre-libre est faisable, mais physiquement la structure doit avoir des supports d'une manière ou d'une autre. Pour s'approcher des conditions idéales d'un libre-libre, on suspend la structure à l'aide des liaisons suffisamment élastiques pour ne pas trop la contraindre.

Cependant, ceci limite les degrés de liberté de la structure et par conséquent, on n'aura pas un mouvement pur de corps rigide à la fréquence zéro. La règle du pouce stipule que la plus haute fréquence du corps rigide doit être inférieure à 10% de la première fréquence de flexion [11].

## CHAPITRE 4

### APPLICATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION DANS LE DOMAINE SPECTRAL

#### 4.1 Introduction

Ce chapitre consiste en l'application de l'analyse modale expérimentale d'une structure vibrant dans l'air et dans l'eau avec la méthode spectrale. On mesurera les fréquences de résonance, les amortissements et les modes à partir des fonctions de transfert obtenues en faisant le rapport de la réponse vibratoire sur la force d'excitation. On appliquera cette méthode dans l'air et dans l'eau stagnante à différentes hauteurs d'immersion. On mettra ainsi en évidence l'existence de la masse ajoutée.

#### 4.2 Matériel utilisé :

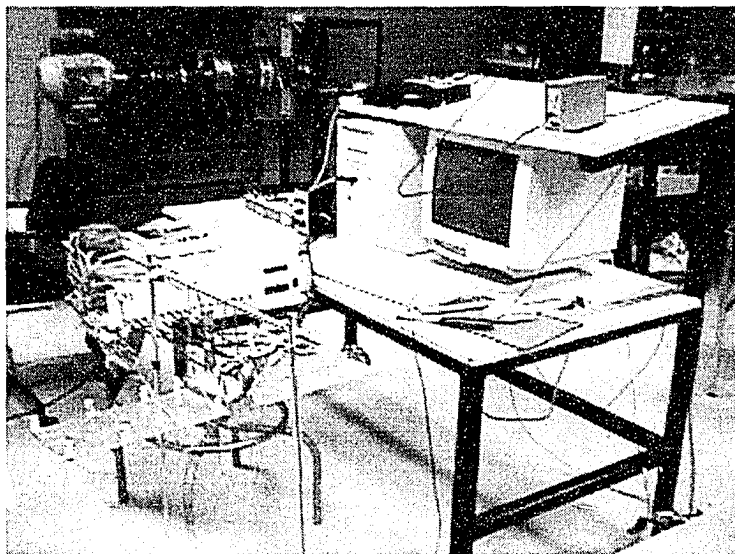


Figure 13 La chaîne de mesure utilisée

L'équipement utilisé (figure 13) pour réaliser les mesures expérimentales consiste en une chaîne de mesure de vibration composée des éléments suivants :

- 16 Accéléromètres PCB330A (Structcel Vibration Sensor) très léger idéal pour les petites structures (figure 14);

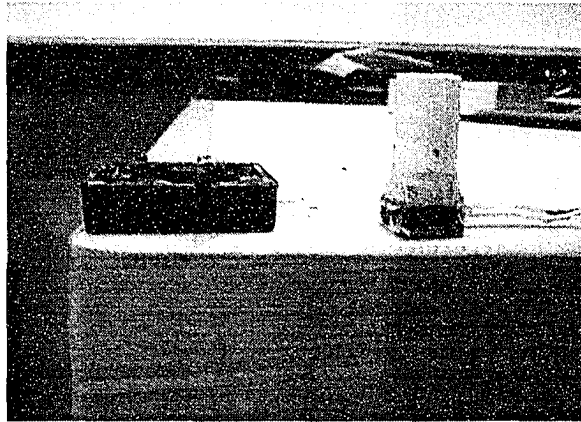


Figure 14 Accéléromètre Type PCB330A

- Un calibrateur (excitation d'1 g à 159 Hz);
- Conditionneur à 16 canaux PCB pour amplifier les sorties des accéléromètres (figure 15);

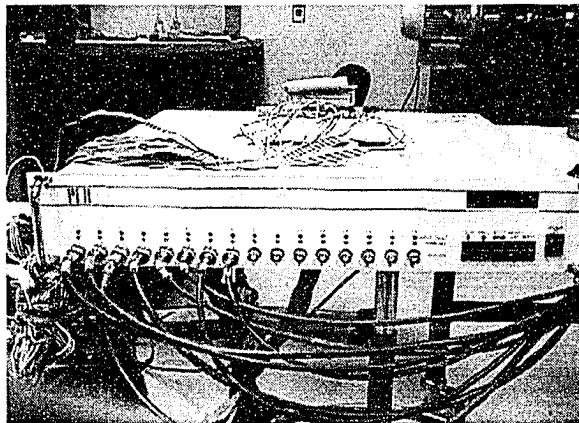


Figure 15 Conditionneur à 16 canaux PCB

- Carte d'acquisition de données à huit voies Type Medallion Zonic Analyzer (figure 16);

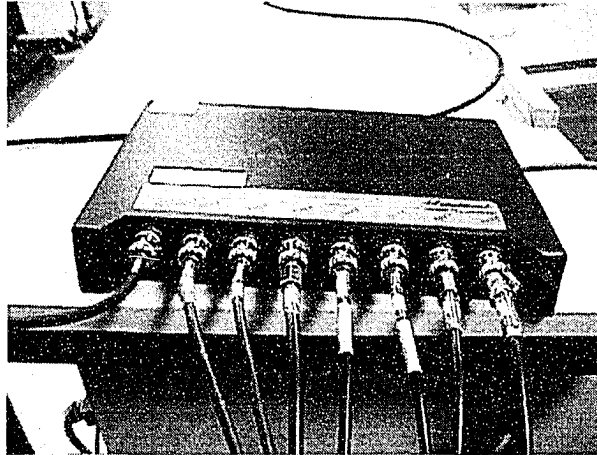


Figure 16 Carte d'acquisition à 8 canaux  
Medallion ZONIC

- Une carte PC MCIA;
- Un marteau d'impact muni d'un capteur de force type 208A03 (sensibilité : 429N/V) et un amplificateur PCB Model 482A04 pour amplifier la sortie du capteur de force (figure 17);

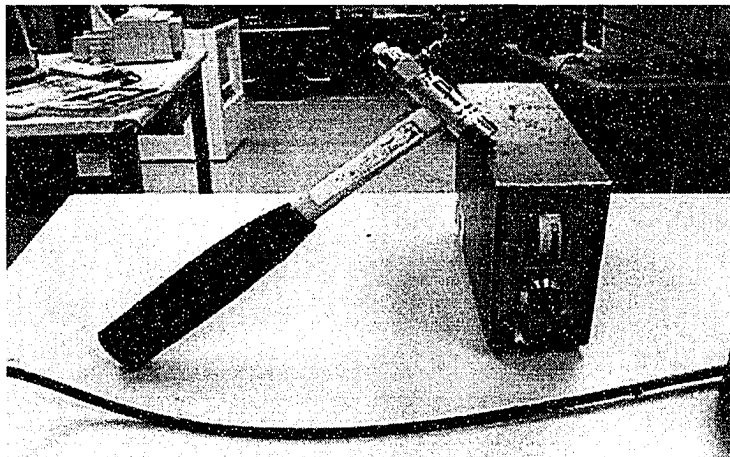


Figure 17 Marteau d'impact PCB, Capteur  
de force et conditionneur pour  
marteau d'impact PBC

- Une tige en aluminium pour prolonger le marteau dans l'eau (figure 18);

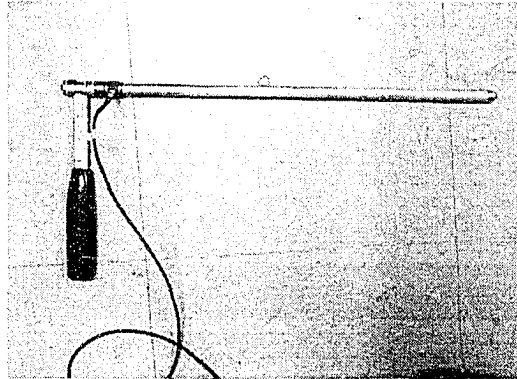


Figure 18 Tige en aluminium pour prolonger le marteau dans l'eau

- Un logiciel pour analyse modale Medallion Zonic version 6,02;
- Attaches élastiques;
- Un bac d'eau appartenant à l'IREQ (figure 19);
- Un modèle réduit d'ailette hydraulique appartenant à l'IREQ dite structure oiseau (figures 19 et 20);

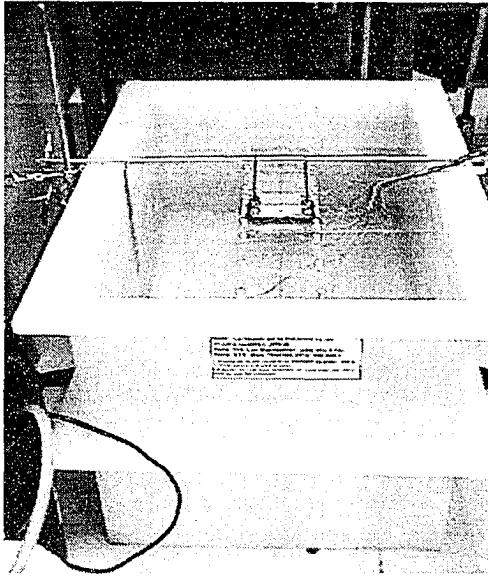


Figure 19 Le bac d'eau et la structure *oiseau* de l'IREQ

#### 4.3 Déroulement des essais

L'ailette (structure oiseau) est constituée de deux plaques en aluminium soudées entre elles par l'intermédiaire d'un massif en aluminium aussi. Elle est suspendue à l'aide des attaches élastiques pour simuler les conditions d'un cas libre-libre, afin qu'il n'y ait pratiquement aucune contrainte sur les degrés de liberté de l'ailette. Les essais ont été effectués en premier à l'air libre. L'ailette est suspendue dans l'air. Après ça, celle-ci est plongée dans un bac suffisamment rempli d'eau. L'excitation est assurée à l'aide du marteau d'impact prolongé d'une tige en aluminium pour pouvoir effectuer l'excitation à plusieurs hauteurs d'immersion en toute sécurité en évitant le contact du marteau avec l'eau. Un impact est donné au niveau du centre du massif de la structure à l'aide du marteau équipé d'un capteur de force. L'accélération du mouvement vibratoire de l'ailette est perçue au niveau des accéléromètres PCB qui filtrent le signal et le transmettent à travers l'amplificateur vers la carte d'acquisition qui charge les données sur l'ordinateur par l'intermédiaire d'une carte PCMCIA. D'autre part, le signal de l'impact délivré par le capteur de force passe simultanément par un conditionneur vers la

carte d'acquisition. Le signal est traité sur le logiciel Medallion Zonic qui permet de visualiser les fonctions de transfert d'inertance soit le rapport force sur l'accélération (rapport  $A/F$ ). Seize (16) capteurs d'accélération ont été installés au niveau de seize points de mesures sur la structure pour permettre une acquisition simultanée (figure 20).

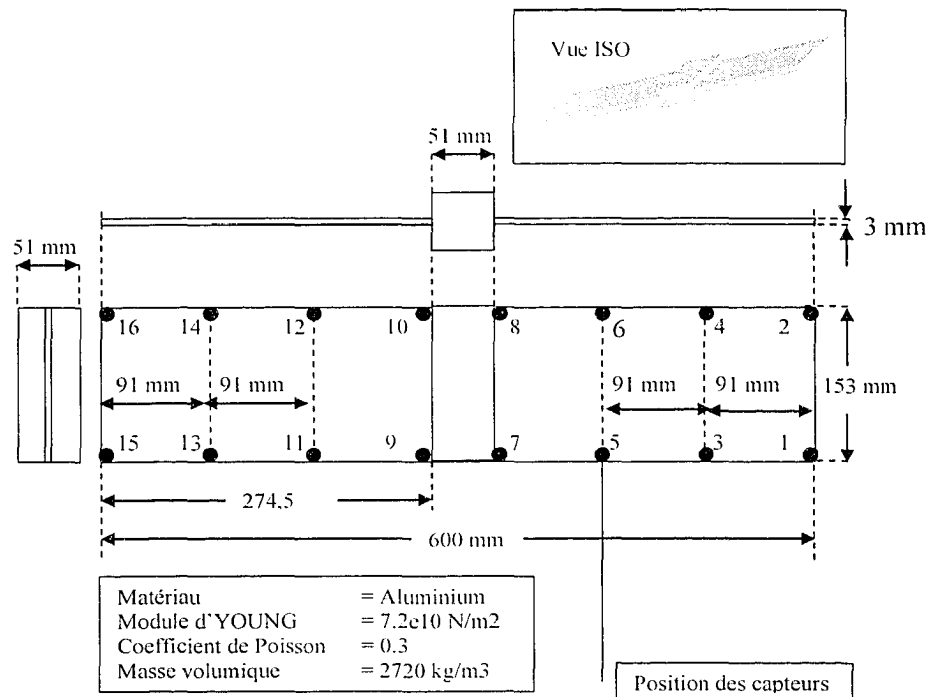


Figure 20 Points de mesures sur la structure oiseau (16 points)

Cette méthode a été appliquée dans l'air et dans l'eau. Les fréquences de résonances, les amortissements ainsi que les modes de vibration ont été déterminés dans les deux cas. Nous rapportons les résultats obtenus dans ce qui suit.

#### 4.4 Analyse modale dans l'air

On utilise le montage décrit dans la figure 21.



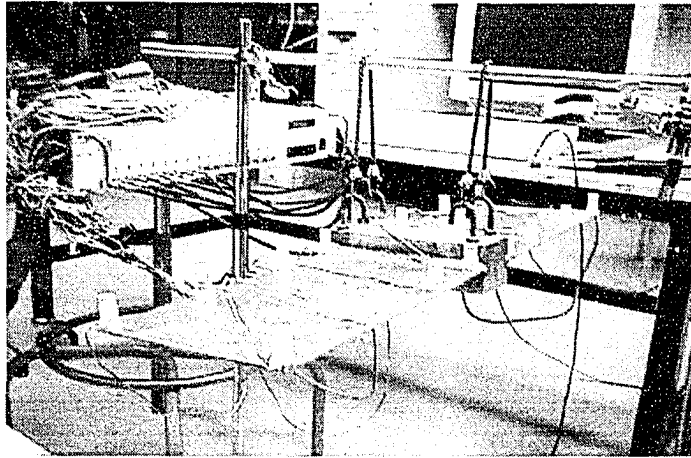


Figure 21 Montage de la structure oiseau dans l'air

#### 4.4.1 Mesure de la fonction de transfert (FRF)

Les fonctions de transfert (FRF) obtenues au niveau des différents points de l'ailette, ont été superposées afin de mettre en évidence les fréquences de résonances. La figure 22 illustre les parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert d'inertance au point 1.

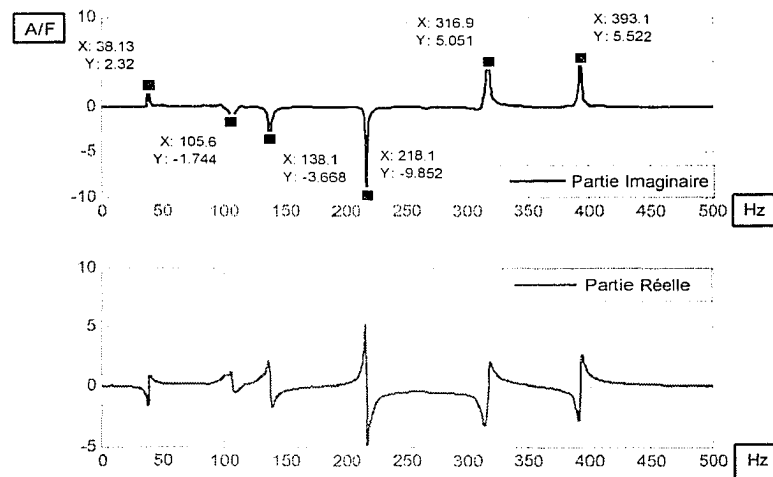


Figure 22 Fonction de transfert au point 1, mesures dans l'air (Inertance A/F)

La figure 23 illustre les fonctions de transfert superposées de tous les points.

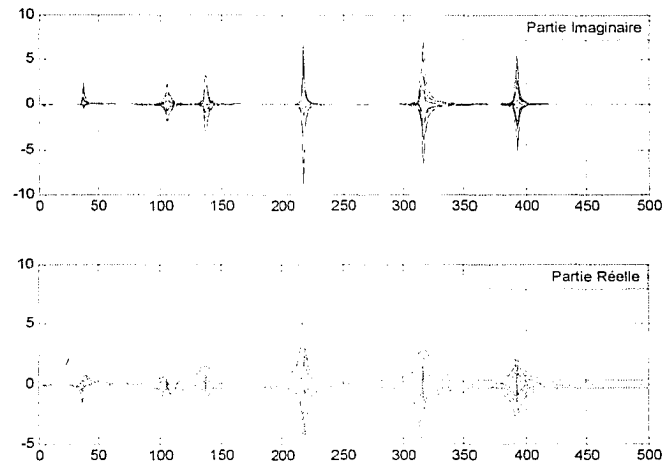


Figure 23 Superpositions des fonctions de transfert (mesures faites dans l'air)

Après avoir effectué plusieurs mesures, sur une gamme de fréquence maximale de 500 Hz, on a obtenu les fréquences de résonances et les amortissements  $\xi$  (%) présentés dans le tableau I. Les modes de vibration ont été classés selon l'ordre croissant des fréquences :

Tableau I

Fréquences de résonances et amortissements de la structure oiseau mesurés dans l'air avec la méthode spectrale

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Fréquences en Hz	38	105	137	218	317	393
$\xi$ (%)	0,509	0,595	0,910	0,500	0,332	0,594

#### 4.4.2 Analyse modale de la structure oiseau dans l'air par la méthode des éléments finis

Le calcul des fréquences de résonance de la structure dans l'air a été effectué par élément finis. Le logiciel ANSYS [34] a été utilisé pour effectuer ce calcul. L'élément utilisé est l'élément plaque SHELL63 à huit nœuds qui permet de considérer six degrés de liberté par nœud, à savoir trois translations et trois rotations. Les liaisons élastiques utilisées pour la suspension de la structure ont été aussi représentées dans le modèle en éléments finis par deux ressorts. Ceci a été modélisé sur ANSYS par l'élément COMBIN14. Le modèle est représenté dans la figure 24.

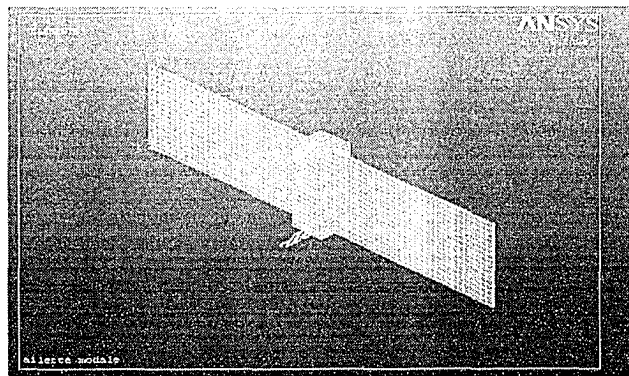


Figure 24 Modélisation par éléments finis de la structure oiseau suspendue par deux ressorts élastiques

Les fréquences de résonance calculées par la méthode des éléments finis comparées aux résultats expérimentaux mesurés à l'ETS et aux résultats calculés et mesurés de l'IREQ sont représentés dans le tableau II.

Tableau II

Fréquences expérimentales dans l'air comparées avec la méthode des éléments finis  
(Résultats de l'ETS et de l'IREQ)

ETS			IREQ		
Modes	ANSYS (Hz)	Mesuré (HZ)	Modes	Calculé (Hz)	Mesuré (HZ)
1	38,005	38	-	39,4	40
2	115,86	105	1	52,177	-
3	133,28	137		116,605	114
4	159,18	-	2	135,395	-
5	216,41	218		159,75	153
6	357,15	357	3	223,039	234
7	437,46	437	4	333,405	333
-	-	-	5	444,637	444
-	-	-	-	457,775	456
-	-	-	-	600,438	634
-	-	-	8	674,325	-

#### 4.5 Analyse modale dans l'eau stagnante

Les mêmes mesures ont été effectuées, cette fois-ci l'ailette immergée dans l'eau (figure 21). On note dans ce cas, l'impossibilité de la réalisation de l'essai avec les dimensions géométriques communément connues d'un marteau d'impact. Nous avons donc conçu une rallonge en aluminium (figure 18) qui permet d'effectuer l'excitation à différents niveaux d'immersion. Cette tige est très légère et on a vérifié qu'elle n'a aucune influence sur les fréquences de résonances de la structure.

Deux hauteurs d'immersions ont été essayées. On rapporte les résultats obtenus suivant deux profondeurs, minimale et maximale par rapport au bassin d'eau (15 cm et 37,5 cm).

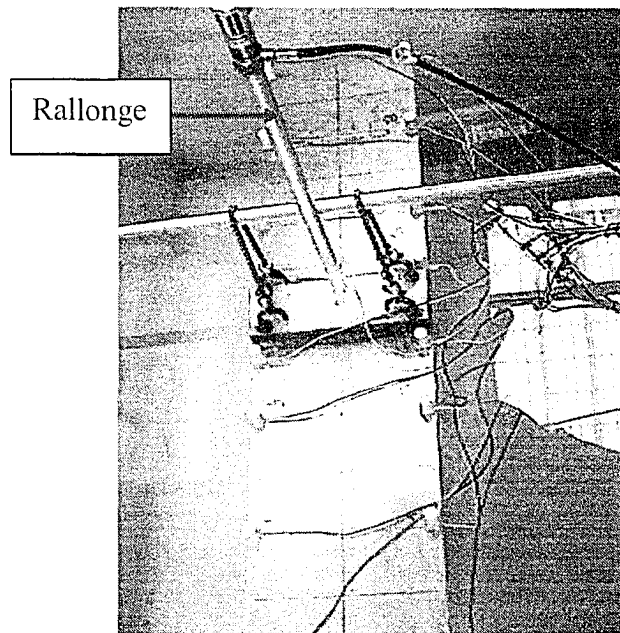


Figure 25 Structure oiseau immergée dans l'eau stagnante

#### 4.5.1 Première Hauteur d'immersion ( $H_1 = 15 \text{ cm}$ )

On fait la première mesure à une profondeur de 15 cm.

##### 4.5.1.1 Mesure de la FRF

La figure 26 illustre la fonction de transfert (inertance) au point 1 à une hauteur d'immersion  $H_1 = 15 \text{ cm}$ .

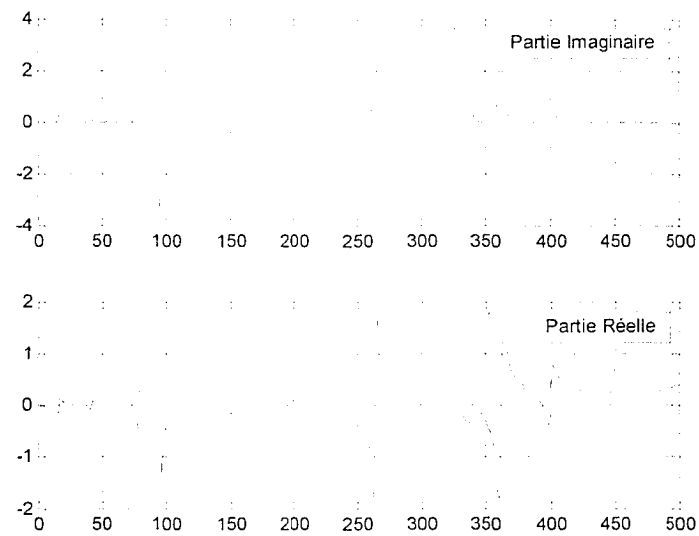


Figure 26 Fonction de transfert au point 1 mesurée dans l'eau.  $H_1 = 15$  cm

La figure 27 illustre les fonctions de transfert superposées de tous les points :

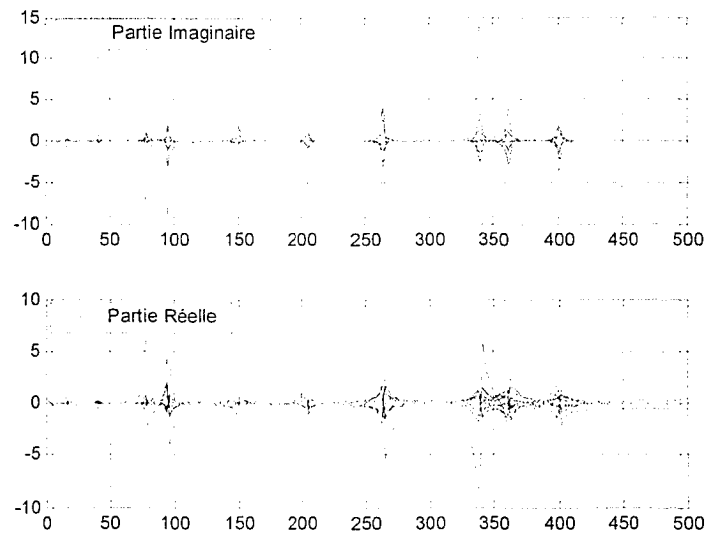


Figure 27 Superpositions des fonctions de transfert mesurées dans l'eau.  $H_1 = 15$  cm

Les fréquences de résonances et les amortissements  $\xi$  (%) sont présentés dans le tableau III. Les modes de vibration ont été classés selon l'ordre croissant des fréquences.

Tableau III

Fréquences de résonances et amortissements de l'ailette dans l'eau stagnante. Hauteur d'immersion  $H_1=15\text{cm}$

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fréquences en Hz	17	42	79	95	151	206	265	340	363	381	401
$\xi$ (%)	0,93	0,46	0,37	0,45	1,79	0,66	0,32	0,44	0,55	0,43	0,40

#### 4.5.2 Deuxième Hauteur d'immersion ( $H_2 = 37,5\text{ cm}$ )

On prend cette fois les mesures à une profondeur  $H_2 = 37,5\text{ cm}$ .

##### 4.5.2.1 Mesure de la FRF

Après avoir effectué plusieurs mesures, sur une gamme de fréquence maximale de 500 Hz, on a obtenu les fonctions de transfert des différents points de mesures à la hauteur d'immersion de 37,5 cm. La figure 28 illustre la fonction de transfert en un point.

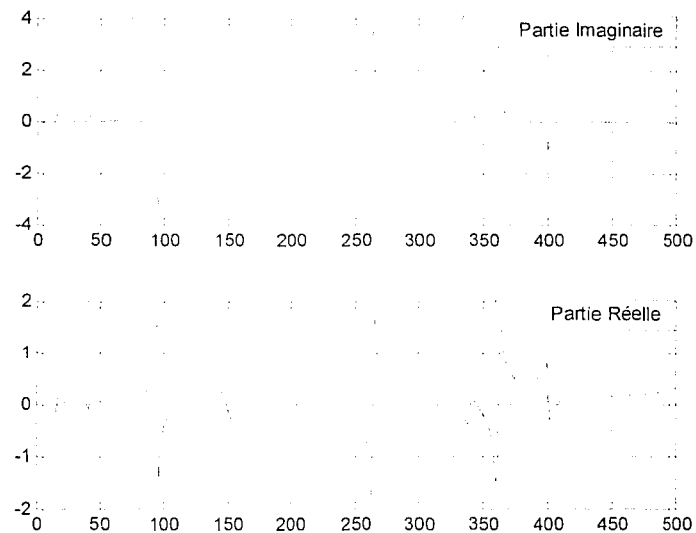


Figure 28 Fonction de transfert en un point mesurée dans l'eau.  $H_2 = 37,5$  cm

La figure 29 illustre les fonctions de transfert superposées de tous les points :

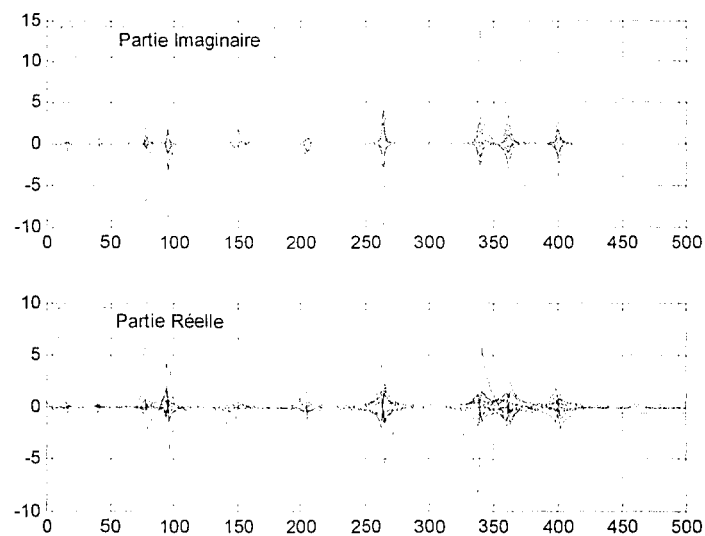


Figure 29 Superpositions des Fonctions de transfert mesurées dans l'eau.  $H_2 = 37,5$  cm

Après avoir effectué plusieurs mesures, sur une gamme de fréquence maximale de 500 Hz, on a obtenu les fréquences de résonance et les amortissements  $\xi$  (%) représentées



dans le tableau IV. Les modes de vibration ont été classés selon l'ordre croissant des fréquences :

Tableau IV

Fréquences de résonances et amortissements de la structure oiseau dans l'eau stagnante.  
Hauteur d'immersion  $H_2=37,5$  cm.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fréquences en Hz	16	42	79	96	151	206	266	339	359	380	401
$\xi$ (%)	0,87	0,48	0,55	0,4	1,33	0,89	0,4	0,6	0,6	0,5	0,5

Les résultats mesurés dans l'eau à l'ETS comparés aux résultats mesurés et calculés dans l'eau à l'IREQ sont représentés dans le tableau V.

Tableau V

Les résultats mesurés dans l'eau à l'ETS comparés aux résultats mesurés et calculés dans l'eau stagnante à l'IREQ

ETS		IREQ			
Modes	Mesuré (HZ)	Modes	Calculé (Hz)	Modes	Mesuré (HZ)
1	17	-	15,043	1	16
2	42	1	51,822	-	-
3	79	-	40,925	-	-
4	95	2	60,871	-	-
5	151	-	88,071	-	-
6	206	3	101,763	2	96
7	265	4	167,62	-	154
8	340	5	207,14	4	213
9	363	-	231,749	-	-
10	381	-	293,713	5	270
11	401	8	401,034	-	424

#### **4.5.2.2 Comparaison eau/air**

##### **4.5.2.2.1 Comparaison des fréquences de résonances**

Dans la figure 30, on fait la superposition des fonctions de transfert obtenues dans l'air et dans l'eau pour mettre en évidence l'effet de la présence de l'eau sur les fréquences de résonance. La comparaison a été effectuée, au point de mesure 1, sur la même gamme de fréquence de 0-500 Hz.

Ceci peut être rapporté dans le tableau VI, les modes étant classés selon l'ordre croissant des fréquences de résonances. On note que, sur la même gamme de fréquence de 0-500 Hz, le nombre de modes extraits dans l'air n'est pas le même que celui extrait dans l'eau. En effet, on observe 6 modes dans l'air contre 10 modes dans l'eau entre 0 et 500 Hz. Aussi, la différence entre les fréquences de résonances pour leurs modes respectifs est très nette. Ainsi on observe à titre d'exemple, une fréquence de 38 Hz au premier mode dans l'air alors qu'elle est de 17 Hz dans l'eau. On remarque aussi, que les fréquences de résonances sont réduites presque de la moitié dans l'eau par rapport à l'air, le rapport entre les deux variant approximativement entre 40% et 60% selon le mode.

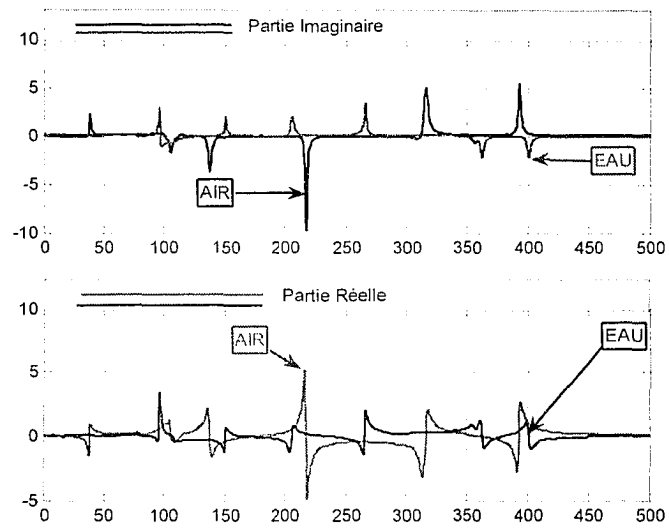


Figure 30 Corrélation Eau/Air au même point de mesure de fréquences de résonances

Tableau VI

Comparaison des fréquences de résonance dans l'air et dans l'eau de 0 à 500 Hz

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fréquences dans l'eau en Hz	17	42	79	95	151	206	265	340	363	381	401
Fréquences dans l'air en Hz	38	105	137	218	317	393	-	-	-		-
Rapport EAU/AIR (%)	44,7	40,6	57,7	44	48	52	-	-	-		-

#### 4.5.2.2.2 Comparaison des amortissements

Le tableau VII montre les rapports des amortissements dans l'eau sur les amortissements dans l'air pour chaque mode pour la hauteur  $H_1=15$  cm.

Tableau VII

Rapport des amortissements Eau/Air pour la hauteur  $H_1=15$  cm

Modes	1	2	3	4	5	6
Amortissements dans l'air (%)	0,509	0,595	0,910	0,500	0,332	0,594
Amortissements dans l'eau (%)	0,93	0,46	0,37	0,45	1,79	0,66
Rapport	1,8	0,8	0,4	0,9	5,4	1,1

Le tableau VIII montre les rapports des amortissements dans l'eau sur les amortissements dans l'air pour chaque mode pour la hauteur  $H_2=37,5$  cm :

Tableau VIII

Rapport des amortissements Eau/Air pour la hauteur  $H_2=37,5$  cm

Modes	1	2	3	4	5	6
Amortissements dans l'air (%)	0,509	0,595	0,910	0,500	0,332	0,594
Amortissements dans l'eau (%)	0,87	0,48	0,55	0,4	1,33	0,89
Rapport	1,7	0,8	0,6	0,8	4	1,5

#### 4.5.3 Comparaison dans l'eau des hauteurs d'immersion $H_1$ et $H_2$

#### 4.5.4 Comparaison des fréquences de résonances $H_2/H_1$

On observe le même nombre de fréquences de résonances sur la même gamme de fréquence de 0-500 Hz entre les deux hauteurs d'immersion, et on observe aussi que les fréquences de résonances sont les mêmes entre les deux profondeurs. Ceci est montré dans le tableau IX.

Tableau IX

Fréquences de résonances en Hz des profondeurs  $H_2$  et  $H_1$ 

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fréquences en $H_1$ (Hz)	16,9	42	79	95,5	151	206	265	340	363	381	401
Fréquences en $H_2$ (Hz)	16	42	79	96	151	206	266	339	359	380	401

#### 4.5.4.1 Comparaison des amortissements $H_2/H_1$

Les rapports des amortissements entre les profondeurs  $H_2$  et  $H_1$  sont dans le tableau X. On voit que les amortissements sont pratiquement les mêmes entre les deux hauteurs.

Tableau X

Rapport des amortissements  $H_2/H_1$ 

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$H_1$	0,93	0,46	0,37	0,45	1,79	0,66	0,32	0,44	0,55	0,43	0,40
$H_2$	0,87	0,48	0,55	0,4	1,33	0,89	0,4	0,6	0,6	0,5	0,5
Rapport $H_2/H_1$	0,94	1,04	1,49	0,89	0,74	1,35	1,25	1,36	1,09	1,16	1,25

#### 4.5.5 Commentaires

On remarque dans le tableau VII des rapports d'amortissements Eau- $H_1$ /Air que l'amortissement n'a pas changé pour le mode 6. Il a légèrement augmenté d'un rapport variant entre 1,8 pour le mode 1 et il a légèrement diminué d'un rapport variant entre 0,4 et 0,9 pour les modes 2,3 et 4. L'amortissement a fortement augmenté au mode 5 par rapport aux autres modes d'un rapport de 5,4. On remarque dans le tableau VIII des rapports d'amortissements Eau- $H_2$ / Eau- $H_2$  que l'amortissement a légèrement augmenté au niveau des modes 1 et 6 d'un rapport variant entre 1,5 et 1,7 et a diminué

au niveau du mode 2,3 et 4 d'un rapport de 0,6 à 0,8. L'amortissement a fortement augmenté au mode 5 par rapport aux autres modes d'un rapport de 4.

#### 4.6 Comparaison des modes obtenus entre l'ETS et l'IREQ

On fait dans ce qui suit une confrontation entre les résultats obtenus à l'ETS et ceux obtenus à l'IREQ. Tous les modes dans l'air ont été comparés dans la figures 31 et la figure 32.

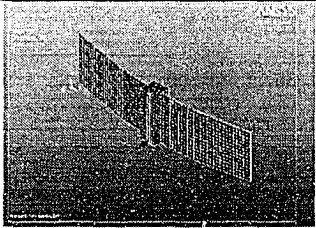
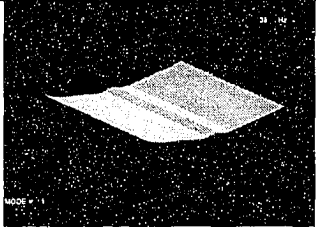
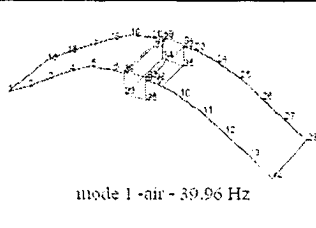
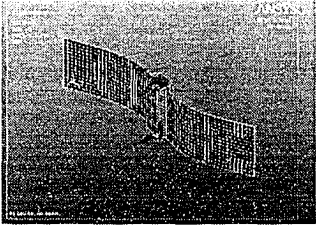
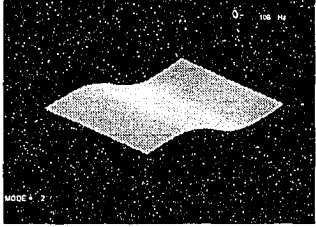
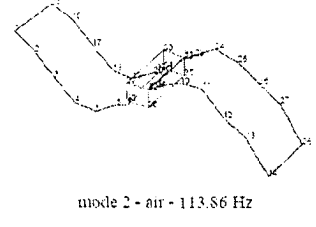
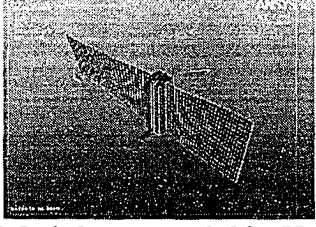
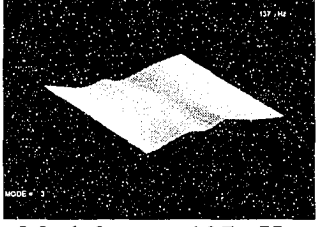
AIR		
ETS		IREQ
Anslys	Expérimental	Expérimental
 Model1, 38,005 Hz	 Model1, 38Hz	 mode 1 - air - 39.96 Hz
 Mode2, 115,86 Hz	 Mode2, 106 Hz	 mode 2 - air - 113.86 Hz
 Mode3, 133,28 Hz	 Mode3, 137 Hz	

Figure 31 Comparaison des modes dans l'air entre l'ETS et l'IREQ

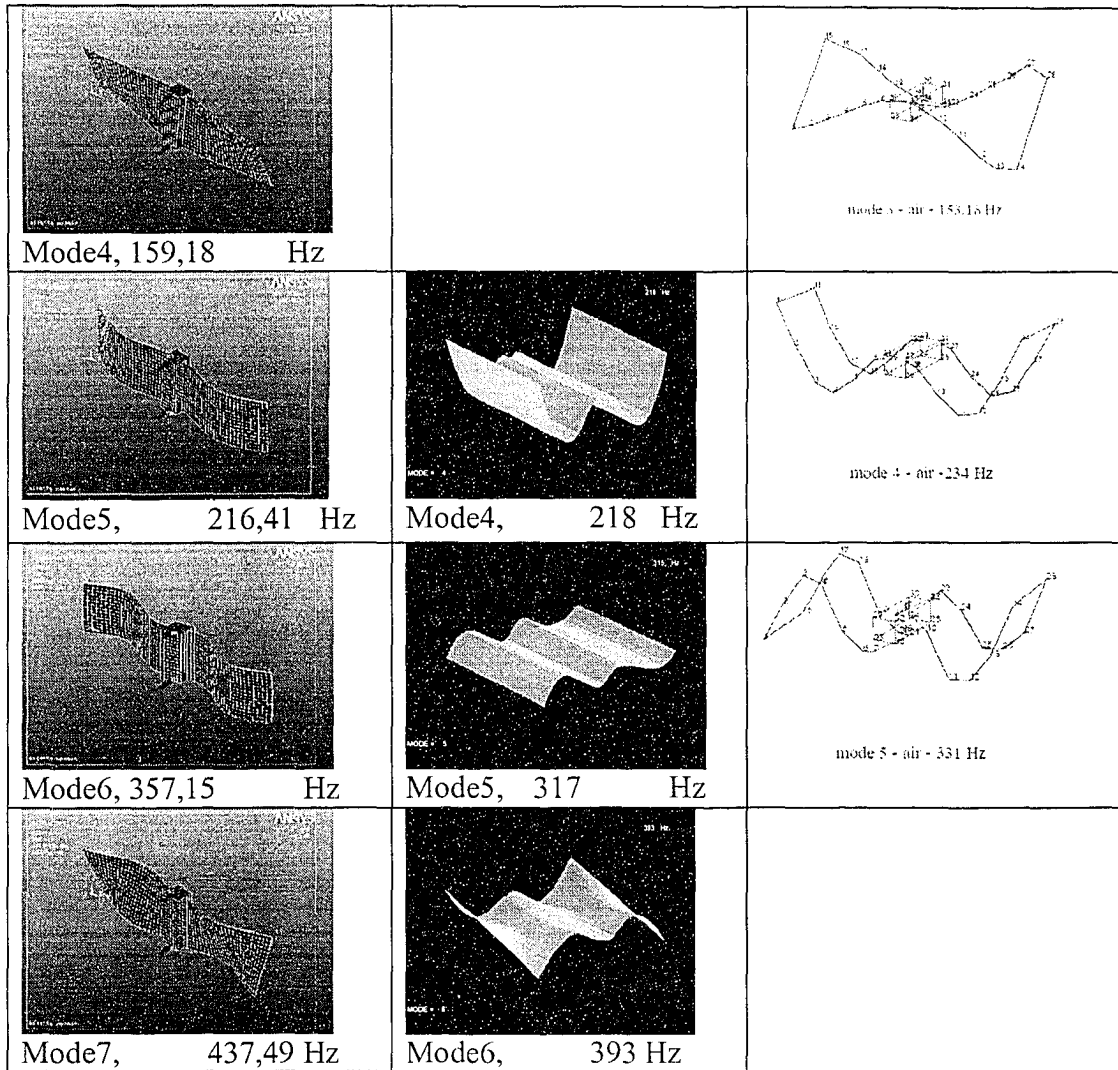


Figure 32 Comparaison des modes dans l'air entre l'ETS et l'IREQ, (suite de la figure 31)

Les modes dans l'eau stagnante ont été comparés dans les figures 33, 34 et 35.

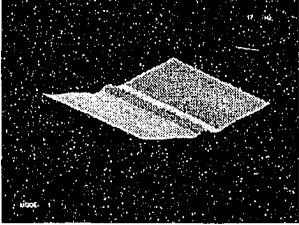
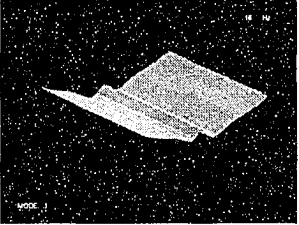
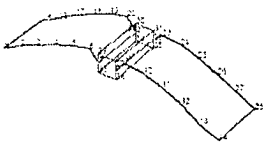
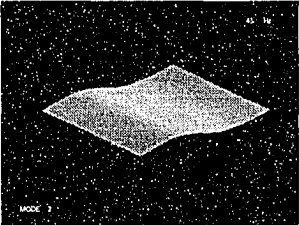
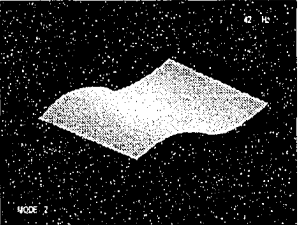
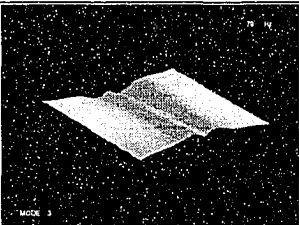
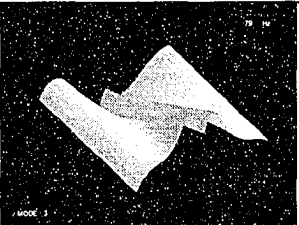
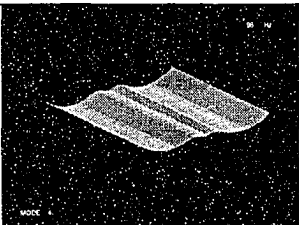
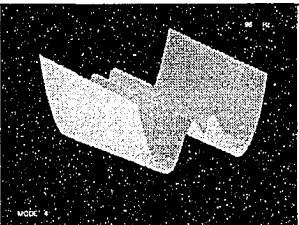
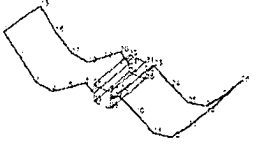
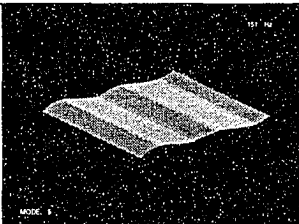
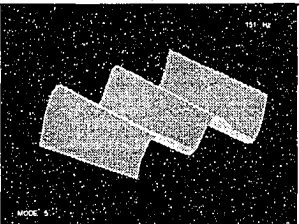
EAU stagnante		
ETS Expérimental		IREQ
Hauteur H1=15 cm	Hauteur H2=37,5 cm	Expérimental
 Mode 1, 16,9 Hz	 Mode 1, 16 Hz	 mode 1 - eau - 16.45 Hz
 Mode 2, 42 Hz	 Mode 2, 42 Hz	
 Mode 3, 79 Hz	 Mode 3, 79 Hz	
 Mode 4, 95,5 H	 Mode 4, 96 Hz	 mode 2 - eau - 96 Hz
 Mode 5, 151 Hz	 Mode 5, 151 Hz	

Figure 33 Comparaison des modes dans l'eau entre l'ETS et l'IREQ



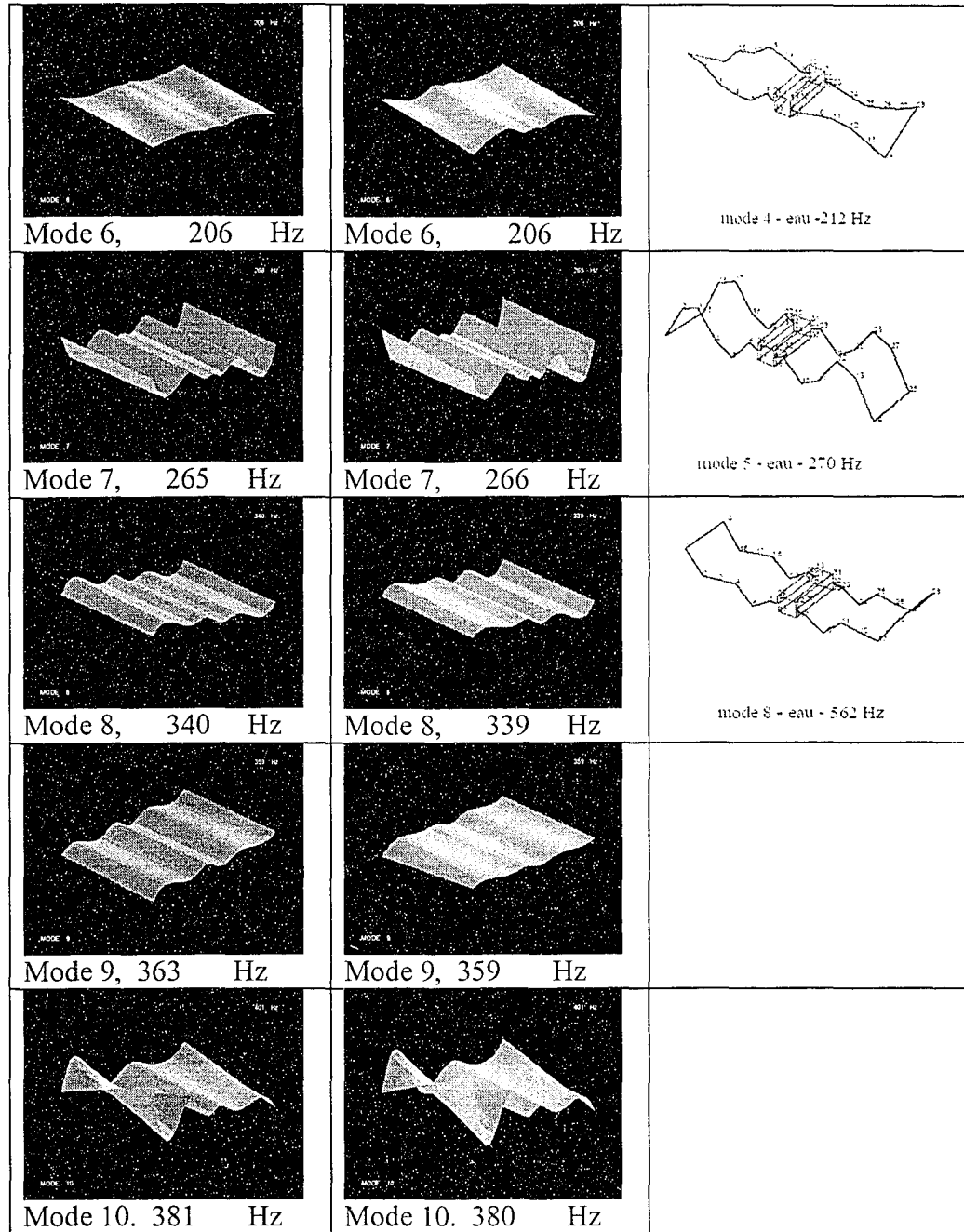


Figure 34 Comparaison des modes dans l'eau entre l'ETS et l'IREQ (suite)

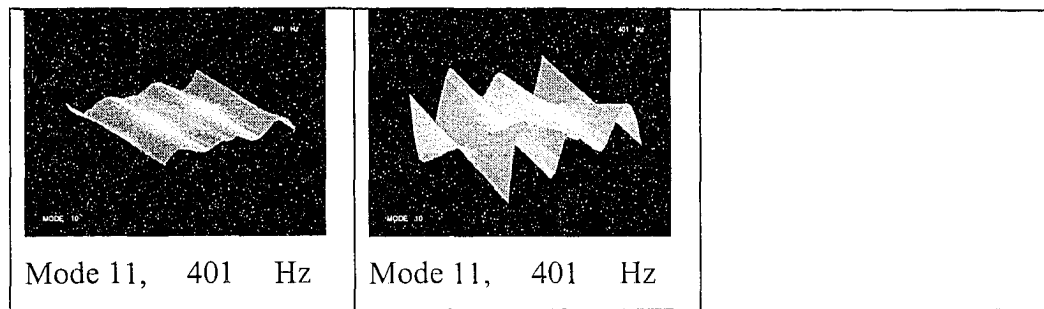


Figure 35 Comparaison des modes dans l'eau entre l'ETS et l'IREQ (suite)

#### 4.6.1 Commentaires

L'analyse modale que nous avons effectuée dans l'air révèle les mêmes modes vibratoires que ceux déterminés par l'IREQ, mis à part une légère différence au niveau de la fréquence obtenue au troisième mode qui est de 133 Hz pour nous et de 153 Hz pour l'IREQ. On mesure un mode en plus à l'ETS à la fréquence de 393 Hz qui est le sixième mode. L'analyse modale que nous avons effectuée dans l'eau révèle plus de modes vibratoires par rapport aux résultats obtenus à l'IREQ.

C'était une application de la méthode d'identification spectrale dans l'air et l'eau stagnante. Cette méthode, donne de bons résultats. Mais, elle montre ses limites dans le cas où l'on ne peut pas mesurer la force d'excitation. À cet effet, on propose dans ce qui suit, les méthodes d'identification temporelle comme une autre alternative.

## CHAPITRE 5

### MÉTHODES D'IDENTIFICATION DES SYSTÈMES

#### 5.1 Introduction

On définit le modèle d'un système comme une représentation mathématique qui donnerait une bonne approximation de sa réponse. L'identification des systèmes est un processus qui permet d'estimer les paramètres d'un modèle connaissant sa sortie à une entrée donnée. D'une manière générale nous relevons deux classes de méthodes d'identification que nous présenterons dans ce qui suit.

##### 5.1.1 Méthodes paramétriques

Ces méthodes concernent le cas où l'on connaît la représentation mathématique du modèle. On identifie ainsi les paramètres du modèle qui donneraient une meilleure approximation de la réponse.

##### 5.1.2 Méthodes non paramétriques

L'identification dans ce cas consiste en la recherche de la meilleure fonction représentative de la relation entrée-sortie du système.

##### 5.1.2.1 Modèle non paramétrique dans le domaine temporel

La réponse d'un système à une excitation arbitraire peut être déterminée en convoluant celle-ci avec la réponse impulsionnelle du système :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (5.1)$$

La réponse impulsionnelle  $h(\tau)$  d'un système étant la réponse de celui-ci à une impulsion au temps  $\tau$ .

### 5.1.2.2 Modèle non paramétrique dans le domaine fréquentiel

Ces méthodes concernent l'identification dans le domaine fréquentiel (chapitre III).

## 5.2 Systèmes et modèles

Notre intérêt se focalisera dans ce chapitre sur les méthodes paramétriques. La figure 36 montre un système où la fonction  $H(z)$  transforme l'entrée  $U(z)$  en une sortie  $Y(z)$ . En supposant que la relation est linéaire, ceci s'écrit comme suit :

$$Y(z) = H(z)U(z) \quad (5.2)$$

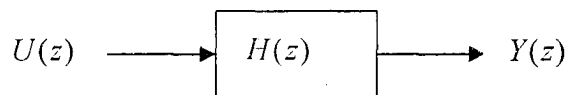


Figure 36 Configuration entrée-sortie

$H(z)$  est dit fonction de transfert du système.

On appelle un système SISO (Single-input Single-output) un système avec une seule entrée et une seule sortie.

On appelle un système MIMO (multiple-input multiple-output) un système à plusieurs entrées et plusieurs sorties. Dans ce cas, l'entrée et la sortie seront des vecteurs à plusieurs dimensions. Par exemple, pour l'entrée on aura :

$$U(z) = [u_1 u_2 u_3 \dots u_n]^T \quad (5.3)$$

On appelle un système MISO (multiple-input Single-output), un système à plusieurs entrées et une seule sortie.

### 5.3 Bruit blanc

On appelle bruit blanc, un processus aléatoire de moyenne nulle et dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences. Le mot blanc a pour origine la lumière blanche dont la puissance couvre uniformément toutes les fréquences optiques.

Le bruit blanc (figure 37) est un bruit souvent rencontré dans la pratique. Mathématiquement il est considéré comme une distribution gaussienne de variance  $\sigma_x^2$  et de moyenne nulle. Un processus gaussien est décrit par la densité de probabilité suivante :

$$f_{pg}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (5.4)$$

$\mu_x$  est la moyenne du processus définie comme l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $x$  :

$$\mu_x = E(x(t)) \quad (5.5)$$

$\sigma_x^2$  est la variance définie par :

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] \quad (5.6)$$

On définit le niveau de bruit dans un signal comme un rapport signal sur bruit dit RSB. Le rapport en décibel est donné par :

$$\text{RSB} = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_w} \right) \quad (5.7)$$

où  $\sigma_y$  est l'écart type du signal pure (sans bruit)  $y$  et  $\sigma_w$  est l'écart type du bruit dans le signal  $w$ .

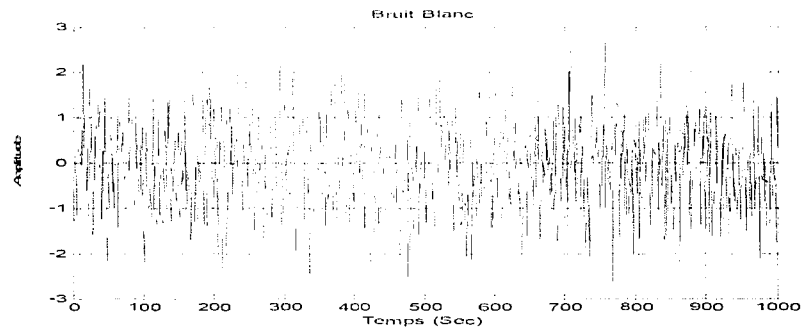


Figure 37 Bruit gaussien de variance 1 et de moyenne nulle (Signal généré sur MATLAB avec la fonction *randn*)

#### 5.4 Systèmes déterministes et systèmes stochastiques

On appelle un système déterministe, un système où l'entrée dépend uniquement de la sortie. Cependant dans plusieurs applications, on mesure à la sortie un bruit additif comme le montre l'équation (5.9) :

$$Z(t) = Y(t) + v(t) = H(z)U(t) + v(t) \quad (5.8)$$

$v(t)$  est un bruit indépendant de l'entrée. Ainsi, la sortie mesurée  $Z(t)$  comporte une composante déterministe et une autre aléatoire mais elle est toujours dite sortie déterministe car la vraie sortie  $Y(t)$  est une fonction déterministe de l'entrée  $U(t)$ .

D'autre part, la sortie peut dépendre d'une perturbation non mesurable  $w(t)$  tel que :

$$Y(t) = H(z)U(t) + w(t) \quad (5.9)$$

où  $w(t)$  est un bruit gaussien blanc.

Le système est dit stochastique dans ce cas car il n'existe pas de sortie déterministe. Le bruit  $w(t)$  peut être perçu comme une entrée supplémentaire du système. Il est possible d'avoir la combinaison des équations (5.9) et (5.10). (Voir la figure 38) :

$$Z(t) = Y(t) + v(t) = H(z)U(t) + w(t) + v(t) \quad (5.10)$$

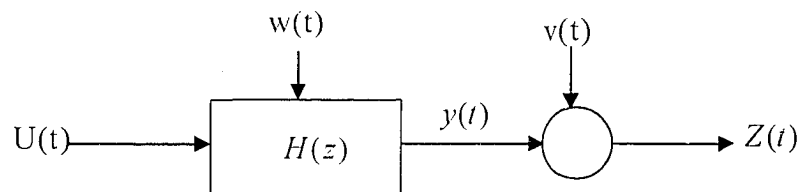


Figure 38 Système comportant une combinaison d'un processus de perturbation gaussienne  $w(t)$  et un bruit de mesure  $v(t)$

Pour comprendre le processus de perturbation, on imagine le cas d'un avion dont les entrées peuvent être représentées par les ailes, et les sorties par l'orientation et la position. On prend l'exemple du vent comme une excitation non mesurée. Une telle excitation s'appelle une perturbation ou bien un bruit de mesure.

## 5.5 Représentation paramétrique

La modélisation paramétrique d'un système consiste à décrire la relation entre les entrées, sorties et bruits de mesure.

### 5.5.1 Représentation paramétrique dans le domaine temporel discret

On peut écrire une représentation paramétrique du système dans le domaine temporel discret. Ceci requiert de définir un opérateur de retard  $z$  défini comme suit :

$$zu(t) = u(t+1) \quad (5.11)$$

$$z^{-1}u(t) = u(t-1) \quad (5.12)$$

La différence entre deux échantillons à deux instants successifs  $t$  et  $(t+1)$  est définie comme suit :

$$u(t+1) - u(t) = zu(t) - u(t) = (z-1)u(t) \quad (5.13)$$

Et pour deux instants  $t$  et  $(t-1)$  :

$$u(t) - u(t-1) = u(t) - z^{-1}u(t) = (1 - z^{-1})u(t) \quad (5.14)$$

Cette propriété s'appelle la transformée en  $z$  qui est équivalente à la transformée de Laplace mais appliquée dans le domaine discret.

#### 5.5.1.1 Modèle ARMA pour un système déterministe

En appliquant la transformée en  $z$ , n'importe quel système déterministe, linéaire, discret peut être décrit par l'équation suivante :

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) \quad (5.15)$$

où :



$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \quad (5.16)$$

$$B(z^{-1}) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \quad (5.17)$$

Le modèle dans l'équation (5.20) s'appelle modèle Auto-Régressif à moyenne mobile ARMA (Autoregressif Moving Average).

### 5.5.1.2 Modèle de l'erreur de sortie

En ajoutant du bruit blanc  $w(t)$  à la sortie  $y(t)$  de l'équation (5.20), on obtient le modèle de l'erreur de sortie (output error (OE) model) :

$$z(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + w(t) \quad (5.18)$$

Ce modèle est aussi un modèle ARMA pour un système déterministe mais avec un bruit additif. Cependant, on verra que le modèle ARMA décrit beaucoup plus les modèles stochastiques. La structure du modèle d'erreur de sortie est donnée dans la figure 39.

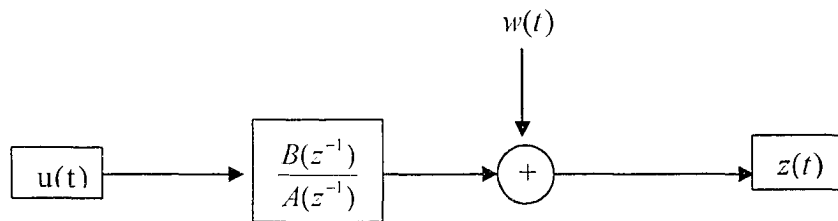


Figure 39 Modèle Erreur de sortie (OE)

### 5.5.1.3 Model AR (auto-regressif)

Dans le cas d'un système stochastique perturbé avec une entrée inconnue, le modèle Auto-Regressif (AR) s'écrit :

$$A(z^{-1})y(t) = w(t) \quad (5.19)$$

$w(t)$  est un bruit gaussien filtré par un filtre tout pôles de fonction de transfert  $1/A(z^{-1})$ .

En examinant l'équation (5.19) on peut écrire :

$$y(t) = w(t) - a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) \quad (5.20)$$

On voit que la valeur à l'instant  $t$  de la sortie dépend de la valeur du bruit au même instant plus les  $n$  valeurs précédentes de la sortie d'où le nom Auto-Regressif (AR). La structure de ce modèle est représentée dans la figure 40.

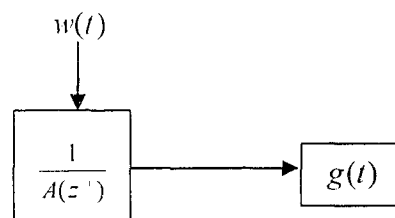


Figure 40 Modèle AR

### 5.5.1.4 Model ARMA pour un système stochastique

Une description plus générale d'un système stochastique avec une entrée inconnue s'exprime en incluant et zéros et les pôles de la fonction de transfert, on obtient le modèle ARMA suivant :

$$A(z^{-1})y(t) = C(z^{-1})w(t) \quad (5.21)$$

Elle a la même forme que l'équation déterministe (5.20), seulement cette fois, l'entrée est un bruit gaussien inconnu. Le polynôme  $C(z^{-1})$  est dit partie MA (Moving Average) de la fonction de transfert  $H(z)$  du système donnée par le rapport suivant :

$$H(z) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (5.22)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m} \quad (5.23)$$

La structure de ce modèle est représentée dans la figure 41.

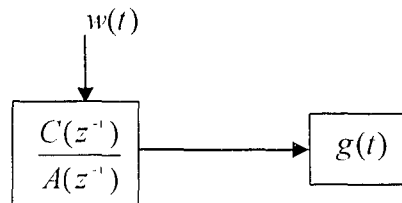


Figure 41 Modèle ARMA

#### 5.5.1.5 Modèle ARX

On peut représenter un système discret qui comporte à la fois une composante stochastique et une autre déterministe par un modèle Auto-Régressif (AR) à entrée exogène (X) donnée par :

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{1}{A(z^{-1})} w(t) \quad (5.24)$$

$u(t)$  est une entrée mesurée (exogène) et  $w(t)$  est une perturbation inconnue.

La structure de ce modèle est représentée dans la figure 42.

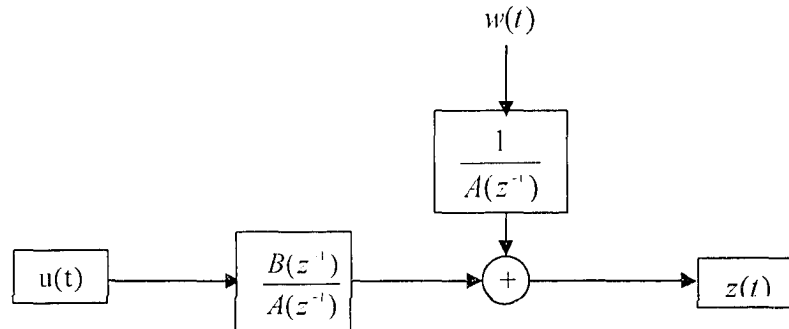


Figure 42      Modèle ARX

#### 5.5.1.6      Modèle ARMAX

Le modèle ARMA peut être généralisé de la même façon que dans le modèle ARX, pour obtenir le modèle ARMAX qui s'écrit comme suit :

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} w(t) \quad (5.25)$$

Sa structure est donnée dans la figure 43 :

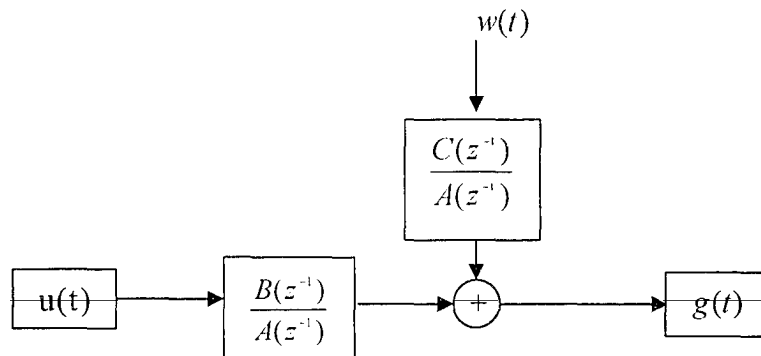


Figure 43      Modèle ARMAX

### 5.5.1.7 Modèle de Box-Jenkins

Le modèle de Box-Jenkins est le modèle paramétrique le plus général. Sa structure, est donnée dans la figure 44 et s'écrit comme suit :

où:

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} w(t) \quad (5.26)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \quad (5.27)$$

$$B(z^{-1}) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \quad (5.28)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m} \quad (5.29)$$

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_m z^{-m} \quad (5.30)$$

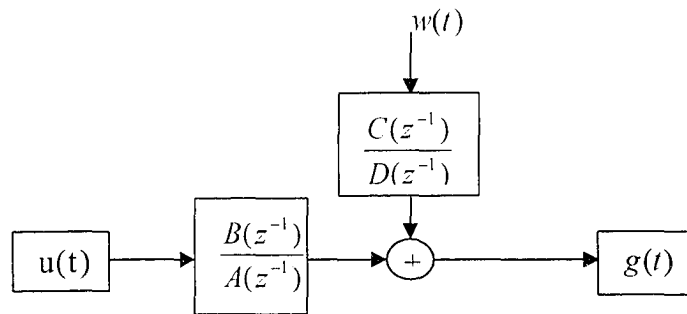


Figure 44 Modèle Box-Jenkins

Tous les autres modèles paramétriques déjà présentés sont des cas particuliers du modèle de Box-Jenkins. Ainsi l'on obtient (tableau XI) :

- Le modèle de l'erreur de sortie (OE) en mettant :  $C(z^{-1}) = D(z^{-1}) = 1$  ;
- Le modèle ARMAX en mettant :  $A(z^{-1}) = D(z^{-1})$  ;
- Le modèle ARX en mettant :  $A(z^{-1}) = D(z^{-1})$  et  $C(z^{-1}) = 1$  ;
- Le modèle ARMA en enlevant la partie déterministe ( $B(z^{-1}) = 0$ ) ;
- Le modèle AR en mettant  $C(z^{-1}) = 1$  et  $B(z^{-1}) = 0$ .

Tableau XI

## Modèles paramétriques

MODÈLE	ÉQUATION	STRUCTURE
Box-Jenkins (Général)	$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} w(t)$	Figure 44
Erreur de sortie (OE) $C(z^{-1}) = D(z^{-1}) = 1$ .	$z(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + w(t)$	Figure 39
ARMAX $A(z^{-1}) = D(z^{-1})$ .	$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} w(t)$	Figure 43
ARX $A(z^{-1}) = D(z^{-1})$ $C(z^{-1}) = 1$	$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{1}{A(z^{-1})} w(t)$	Figure 42
ARMA $B(z^{-1}) = 0$	$y(t) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} w(t)$	Figure 41
AR $C(z^{-1}) = 1$ et $B(z^{-1}) = 0$	$y(t) = \frac{1}{A(z^{-1})} w(t)$	Figure 40

## CHAPITRE 6

### IDENTIFICATION DANS LE DOMAINE TEMPOREL

#### 6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un bref aperçu sur différents modèles paramétriques utilisés pour l'identification des systèmes dans le domaine temporel. L'on a fait la distinction entre les systèmes déterministes où la sortie ne dépend que de l'entrée mesurée du système et les systèmes stochastiques où l'entrée est inconnue et présentée par un processus aléatoire gaussien. Nous nous intéressons à ce dernier cas où l'on identifie les paramètres du système sans mesurer l'entrée. Nous présenterons par conséquent dans ce chapitre quelques éléments théoriques des deux modèles AR et ARMA qui représentent cette situation.

#### 6.2 Méthodes ARMA et AR

##### 6.2.1 Éléments théoriques

##### 6.2.1.1 Formulation de l'équation d'état d'un système mécanique linéaire

L'équation d'un système mécanique linéaire à  $n$  degrés de liberté est donnée par l'équation (6.1) :

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = f(t) \quad (6.1)$$

en posant :

$$x(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Un vecteur de dimension  $(2n, 1)$  contenant le déplacement et les vitesses on arrive à écrire l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]u(t) \quad (6.3)$$

avec :

$$y(t) = [D]x(t) \quad (6.4)$$

Comme vecteur d'observation.

où :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -MK^{-1} & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (6.6)$$

$$[D_c] = [I \quad 0] \quad (6.7)$$

$[A]_{(2n, 2n)}$  est dite la matrice du système dont les valeurs propres  $\lambda_p$  sont liées aux fréquences propres du système. Les matrices  $[B]$  et  $[D_c]$  sont dites les matrices d'observation et de contrôle.

#### 6.2.1.2 Résolution de l'équation d'état dans le domaine temporel

La solution continue de l'équation (6.3) est donnée par la relation suivante [17, 28] :

$$x(t) = \exp\{[A](t - t_0)\} x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp\{[A](t - \tau)\} [B]u(\tau) d\tau \quad (6.8)$$



On lui préfère la version discrète [17] en considérant une période d'échantillonnage  $T$  aux différents instants :

$$t_1 = T, t_2 = 2T, \dots, t_k = kT, \dots \quad (6.9)$$

et en posant :

$$\Theta(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(t - \tau) B d\tau \quad (6.10)$$

où:

$$\Phi(t) = \exp[A]t = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} \quad (6.11)$$

$\Phi(t)$  est dite la matrice de transition  $(2n, 2n)$ .

En supposant que  $u(t)$  est constant durant une période d'échantillonnage, on obtient, après ces opérations intermédiaires (les détails de la démonstration ne sont pas présentés), pour tout le temps d'échantillonnage de  $t_0 = 0$  à  $t_k = kT$ , les formes discrètes des équations (6.3) et (6.4) pour une période  $T = 1$  :

$$x(kT) = \Phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)\Theta u(j) \quad (6.12)$$

$$y(k) = [D_c]x(k) \quad (6.13)$$

En appliquant la transformée en  $z$  aux équations (6.12) et (6.13) et après quelques opérations intermédiaires [17], on arrive finalement à l'écriture suivante qui est l'objet de la démonstration :

$$Y(z) = H(z)U(z) \quad (6.14)$$

avec :

$$z = e^{\lambda_n T} \quad (6.15)$$

où la fonction de transfert  $H(z)$  s'écrit :

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{2n} z^{-2n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{2n} z^{-2n}} \quad (6.16)$$

Cette formulation permet de voir que l'ordre de la fonction de transfert est de  $2n$ , à savoir, deux fois le nombre de degrés de libertés.

### 6.3 Formulation ARMA

Si on connaît l'excitation  $U(z)$  et la fonction de transfert  $H(z)$  en  $z$ , on pourra déterminer la réponse  $Y(z)$  en  $z$ . À partir des équations (6.14) et (6.16) on peut écrire [17] :

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{2n} z^{-2n}) = (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{2n} z^{-2n})U(z) \quad (6.17)$$

En se servant de la transformée en  $z$  inverse :

$$TZ^{-1}(z^{-1}Y(z)) = Y(k-1) \quad (6.18)$$

on obtient :

$$Y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{2n} y(k-2n) = b_1 u(k-1) + \dots + b_{2n} u(k-2n) \quad (6.19)$$



$$\{\theta\}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{2n} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{2n}\} \quad (6.22)$$

$$\{y\}^T = \{y(k), y(k+1), y(k+2), \dots, y(N)\} \quad (6.23)$$

Dans ce cas on peut obtenir les pôles de la fonction de transfert qui nous permettent de déduire les valeurs propres du système.

Le modèle ARMA ne sera stable que si tous les pôles de la fonction de transfert sont de module inférieur à l'unité [17, 31].

#### 6.4 Détermination des paramètres modaux

Les solutions du polynôme dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert. Ils représentent les paramètres AR. Les pôles s'expriment d'après la relation (6.15) :

$$z_p = e^{\lambda_p T}$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage et les  $\lambda_p$  sont les valeurs propres complexes de la matrice  $[A]$ , qui s'écrit en fonction des paramètres modaux comme suit :

$$\lambda_p = -\omega_r \xi_r \pm j\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (6.24)$$

avec  $j^2 = -1$

où :

$\omega_r$  : est la fréquence naturelle;

$\xi_r$  : est l'amortissement.

en posant :

$$\begin{aligned} R &= -\omega_r \xi_r \\ IM &= \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \end{aligned} \quad (6.25)$$

on obtient :

$$\lambda_r = R + jIM \quad (6.26)$$

par conséquent :

$$\omega_r = \sqrt{R^2 + IM^2} \quad (6.27)$$

et

$$\xi_r = \frac{|R|}{\omega_r} \quad (6.28)$$

## 6.5 Problème d'identification

Le problème consiste à estimer les valeurs des paramètres du vecteur :

$$\{\theta\}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{2n} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{2n}\}$$

D'après l'équation (6.21), si la matrice  $[Q]$  est carrée et non singulière, alors on peut déduire directement le vecteur paramètre comme suit :

$$\{\theta\} = [Q]^{-1} \{y\} \quad (6.29)$$

Ce résultat n'a qu'un intérêt théorique, du moment où les mesures expérimentales sont toujours contaminée par un certain niveau de bruit. Par conséquent, le vecteur paramètre estimé de cette manière devient biaisé.

Soit  $\{\hat{\theta}\}$  l'estimé du vecteur paramètre  $\{\theta\}$ . On pourra donc définir une sortie prédite en tenant compte du bruit de mesure comme suit :

$$\{\hat{y}\} = [Q] \{\hat{\theta}\} = [Q] \theta + \{\zeta\} \quad (6.30)$$

$\{\zeta\}$  est un vecteur représentant l'erreur d'estimation.

Pour chaque valeur de ce vecteur, on peut définir une erreur de prédiction comme suit :

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (6.31)$$

Ceci nous permet de définir un critère d'erreur :

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \quad (6.32)$$

$J_N$  s'appelle la fonction coût ou bien la variance de l'erreur de prédiction résiduelle.

Alors la valeur de  $\theta$  sera la valeur de  $\hat{\theta}$  qui minimise la fonction coût  $J_N$  par rapport aux paramètres de prédiction. C'est à dire :

$$\hat{\theta}_N^* = \arg \min_{\theta} J_N \quad (6.33)$$

$\hat{\theta}_N^*$  est la solution optimale[24, 32] ;

$\arg \min_{\hat{\theta}}$  est un opérateur qui désigne la valeur minimale.

Cette approche est dite approche de l'erreur de prédiction. La résolution de cette équation nécessite l'utilisation des algorithmes de calcul. On présente, entre autre, la méthode des moindres carrés.

## 6.6 Méthode des moindres carrés linéaire

En utilisant les équations (6.29) et (6.31) le critère de performance de l'équation (6.32) s'écrit comme suit :

$$J_N = \frac{1}{N} \sum [y(t) - [Q]\hat{\theta}]^2 \quad (6.34)$$

La solution optimale s'obtient en annulant la dérivée première de l'équation ci-dessus :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (J_N) = 0 \quad (6.35)$$

Ceci donne le vecteur paramètre optimal comme suit :

$$\hat{\theta} = [Q^T Q]^{-1} [Q]^T \{y\} \quad (6.36)$$

L'équation (6.36) présuppose que la matrice  $[Q^T Q]$  n'est pas singulière.

Par ailleurs, l'on démontre que le bruit de mesure introduit des erreurs d'estimation quand on utilise l'algorithme des moindres carrés tant que le bruit de mesures n'est pas un bruit blanc. On appelle cette erreur le biais des paramètres [17, 21, 22], qui représente

communément la différence entre les paramètres réels  $\theta$  et les paramètres estimés  $\hat{\theta}$ . On dit alors par définition que [17] :

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (6.37)$$

$\hat{\theta}(N)$  est une estimation asymptotique non biaisée.

En remplaçant l'équation (6.36) dans l'équation (6.37), on obtient [17, 22] :

$$E(\hat{\theta}) = \theta \Rightarrow E\{[Q^T Q]^{-1} [Q]^T \{\zeta\}\} = 0 \quad (6.38)$$

Ceci signifie qu'on n'a une estimation non biaisée que si  $\{\zeta\}$  et  $Q$  sont non corrélés. Ce qui n'est possible que si  $\{\zeta\}$  est un bruit blanc.

Donc l'algorithme des moindres carrés linéaires conduira à une estimation non biaisée que dans le cas où l'erreur de prédiction  $\{\zeta\}$  est un bruit blanc ce qui n'est pas tout le temps vrai [22].

Ainsi d'autres algorithmes ont été développés pour résoudre ce problème à partir des remarques ci-dessus, ce qui a donné naissance à deux grands types de méthodes développées pour les différents modèles de bruits, à savoir :

- méthodes basées sur le blanchiment de l'erreur de prédiction ou bien du résiduel (TYPE I).
- méthodes basées sur la décorrélation entre le vecteur de mesure et l'erreur de prédiction (TYPE II).



## 6.7 Identification par la méthode AR (Auto-Régressif)

Nous allons donner quelques algorithmes utilisés pour l'estimation des paramètres  $a_i$  par la méthode AR.

### 6.7.1 Méthode de Yule-Walker (Y-W)

Cette méthode consiste à résoudre les équations de Yule-Walker, qui expriment une relation entre les paramètres AR et la variance  $\sigma_w^2$  du bruit blanc  $w(t)$  et les covariances du processus  $y(t)$  suivant :

$$y(t) = w(t) - a_1 y(t-1) - \dots - a_p y(t-p) = w(t) + \sum_{k=1}^p a_k y(t-k) \quad (6.39)$$

Les équations de Yule-Walker pour un ordre  $p$  du modèle AR s'écrivent comme suit [31] :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(p) \\ R(-1) & R(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R(1) \\ R(-p) & \dots & R(-1) & R(0) \end{bmatrix}}_{[R]} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

$$R(\tau) = E(y(t)y(t+\tau)) \quad (\text{Cf. chapitre III})$$

$[R]$  est la matrice de covariance d'ordre  $(p+1)$ . Elle est une matrice telle que les parallèles à la diagonale principale sont constituées de termes égaux. Cette forme de matrice porte le nom de matrice de Töeplitz, la résolution du système s'effectue avec un algorithme dit algorithme de LEVINSON [31] qui permet une inversion rapide de cette

matrice pour les langages de programmations tel que le langage C et le langage FORTRAN. Sur MATLAB, l'inversion de la matrice  $[R]$  s'effectue avec la fonction *inv* [21, 31]. La résolution de ce système fournit les paramètres AR ainsi que la variance du bruit estimé.

La densité de puissance spectrale du processus AR d'ordre  $p$  dont l'entrée est un bruit blanc inconnu  $w(t)$  de variance  $\sigma_w^2$  est donnée par [33] :

$$S_{AR} = \frac{\sigma_w^2}{\left| 1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-j\omega i} \right|^2} \quad (6.41)$$

### 6.7.2 Méthodes d'estimation par les moindres carrés

On va illustrer deux types de méthodes de moindres carrés [21].

### 6.7.3 Méthode de covariance

La sortie prédite à priori pour un modèle AR pour un ordre donné  $p$  peut être écrite comme suit :

$$\hat{y}^f(t) = -\sum_{k=1}^p a_k^f y(t-k) \quad (6.42)$$

où  $a_k^f$  sont les paramètres linéaires de prédiction à priori (le symbole  $f$  désigne en anglais forward linear prediction) pour un ordre  $p$ . Ceci dit que la valeur actuelle de la sortie prédite est une somme pondérée des  $p$  échantillons antérieurs.

On définit l'erreur de prédiction à priori comme suit :

$$\varepsilon^f(t) = y(t) - \hat{y}^f(t) = y(t) + \sum_{k=1}^p a_k^f y(t-k) \quad (6.43)$$

En supposant que les mesures sont nulles pour des valeurs temporelles inférieures à 1 la forme matricielle de l'équation (6.43) peut être écrite pour les valeurs de 1 à N comme suit [21] :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^f(1) \\ \vdots \\ \varepsilon^f(p+1) \\ \vdots \\ \varepsilon^f(N-p) \\ \vdots \\ \varepsilon^f(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(p+1) & \ddots & y(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-p) & \ddots & y(p+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N) & \ddots & y(N-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1^f \\ \vdots \\ a_p^f \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

On définit le critère d'erreur à priori selon l'équation (6.32) comme suit :

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^{f^2} \quad (6.45)$$

Ainsi, on peut effectuer l'estimation :

Soit en considérant la rangée de  $\varepsilon^f(1)$  à  $\varepsilon^f(N)$ , ceci fait intervenir les échantillons mesurés et non mesurés (mesures qui précèdent  $y(1)$  supposées nulles).

Soit en considérant la rangée de  $\varepsilon^f(p+1)$  à  $\varepsilon^f(N)$ , ceci fait intervenir uniquement les échantillons disponibles de 1 à N.

Ce dernier cas correspond à la méthode de covariance, l'erreur est définie comme suit [21] :

$$\varepsilon_c^f = \begin{bmatrix} \varepsilon^f(p+1) \\ \vdots \\ \varepsilon^f(N) \end{bmatrix} = T_p \begin{bmatrix} 1 \\ a^f \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

où :

$$a^f = \begin{bmatrix} a_1^f \\ \vdots \\ a_p^f \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

$a^f$  est le vecteur des paramètres estimés.

$T_p$  est la matrice des mesures d'ordre  $(N-p) \times (p+1)$  telle que :

$$T_p = \begin{bmatrix} y(p+1) & \cdots & y(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-p) & & y(p+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N) & \cdots & y(N-p) \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Le critère d'erreur quadratique de la méthode de covariance est :

$$\rho^f = \sum_{t=p+1}^N \varepsilon_c^{f2} = (\varepsilon_c^f)^H \varepsilon_c^f \quad (6.49)$$

Les équations qui minimisent le critère ci-dessus sont données par [21] :

$$T_p^H T_p \begin{bmatrix} 1 \\ a^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

$T_p^{HH} = (T_p^T)^*$  est une matrice Hermitienne ; c'est à dire la matrice conjuguée de la matrice transposée de  $T_p$ .

#### 6.7.4 Méthode des covariances modifiées (M.C.M)

On avait défini le critère d'erreur à priori dans l'équation (6.48). Par ailleurs, on peut aussi définir les trois cas précédant du paragraphe (6.7.3) à partir du prédicteur linéaire à posteriori suivant [21] :

$$\hat{y}^b(k) = -\sum_{k=1}^p a_k^b y(k+p) \quad (6.51)$$

Où  $a_p^b$  sont les paramètres linéaires de prédiction à posteriori (le symbole b vient de la désignation en anglais backward linear prediction) pour un ordre. Ceci dit que la valeur actuelle de la sortie prédite est une somme pondérée des  $p$  échantillons postérieurs. On définit l'erreur de prédiction à posteriori comme suit :

$$\varepsilon^b = y(t-p) - \hat{y}^b(t-p) = y(t-p) + \sum_{k=1}^p a_k^b y(t-p+k) \quad (6.52)$$

On définit le critère d'erreur quadratique à posteriori selon l'équation (6.32) comme suit :

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^{b2} \quad (6.53)$$

La méthode de covariance modifiée consiste à minimiser la moyenne des erreurs quadratiques à priori et à posteriori pour le cas de la méthode de covariance (non windowed case), ainsi le critère d'erreur dans ce cas est le suivant[21] :

$$J_N = \frac{1}{2N} \left( \sum_{t=p+1}^N \varepsilon^{b2} + \sum_{t=p+1}^N \varepsilon^{f2} \right) \quad (6.54)$$

## 6.8 Identification par la méthode ARMA (entrée inconnue)

On avait défini le modèle ARMA pour une entrée inconnue dans l'équation (2.26). La densité de puissance spectrale du processus ARMA d'ordres  $p$  et  $q$  dont l'entrée est un bruit blanc  $w(t)$  de variance  $\sigma_w^2$  est donnée par [33] :

$$S_{\text{ARMA}} = \sigma_w^2 \frac{\left| 1 + \sum_{i=1}^q c_i e^{-j\omega q_i} \right|^2}{\left| 1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-j\omega i} \right|^2} \quad (6.55)$$

On a vu que la méthode ARMA est un cas particulier de la méthode ARMAX. Les méthodes utilisées sur Matlab pour minimiser le critère d'erreur sont des méthodes itératives qui font partie des méthodes du type I, à savoir les méthodes de blanchiment de l'erreur de prédiction [22]. Ceci, permet donc d'obtenir une estimation non biaisée des paramètres.

## 6.9 Choix de l'ordre du modèle

Puisque l'ordre du modèle choisi est inconnu, il est en général nécessaire dans la pratique d'essayer plusieurs ordres. En se basant sur ce concept, on peut donc calculer un certain critère d'erreur qui indique quel ordre il faut choisir. Un ordre trop bas ne permet pas de décrire complètement la dynamique du système ce qui réduit le nombre de

paramètres à calculer et génère un spectre estimé trop lissé (non précis), et un ordre trop élevé augmente le nombre de paramètres à calculer, ce qui augmente la résolution et introduit de faux détails dans spectre estimé.

### 6.9.1 Critère d'Akaike

Le choix de l'ordre consiste à faire un compromis entre une résolution maximale du spectre estimé et une variance (fonction coût) minimale. Une solution intuitive suggère d'augmenter l'ordre du modèle jusqu'à ce que la fonction coût soit minimale. Cependant sachant que la fonction coût est théoriquement inversement proportionnelle à l'ordre du modèle [21], ce critère n'est donc pas suffisant pour indiquer là où il faut s'arrêter, à moins que le taux de décroissance de la fonction coût devienne soudainement faible. Il s'agit donc d'augmenter l'ordre du modèle tant que le taux de décroissance est significatif, c'est à dire s'il est de l'ordre de 30 % à 50 % [17].

D'autres critères ont été ainsi développés pour le choix de l'ordre du modèle, parmi eux le critère d'information d'Akaike (AIC). Celui-ci consiste à déterminer l'ordre du modèle en minimisant une certaine fonction théorique définie, pour un processus ARMA d'ordres  $p$  pour la partie AR et  $q$  pour la partie MA et un nombre d'échantillons  $N$ , par :

$$AIC(p, q) = N \ln(J_N) + 2 \times (p + q) \quad (6.56)$$

Cette fonction donc passe par un minimum en augmentant l'ordre du modèle. On obtient le critère AIC pour un processus AR pour  $q = 0$ .

### 6.9.2 Critère de stabilité

On dit qu'un modèle est stable si et seulement si tous les pôles complexes sont de modules inférieurs à l'unité.

Si on représente graphiquement, dans le plan complexe, les parties réelle et imaginaire des pôles, la stabilité du modèle signifie que tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité [17, 31].

### 6.10 Choix de la fréquence d'échantillonnage

Durant la collecte des données, une faible fréquence d'échantillonnage ne suffit pas pour observer un système donné du moment où l'on a une perte d'informations. Le choix de la fréquence doit donc vérifier le théorème de SHANNON qui dit que pour reconstituer le signal temporel continu, il faut échantillonner avec une fréquence  $f_c$  qui doit être égale au moins 2 à 3 fois la largeur de bande maximale analysée  $f_{\max}$ . En théorie :

$$f_c = 2.56 \times f_{\max} \quad (6.57)$$

En identification, une fréquence d'échantillonnage trop élevée entraîne un problème d'instabilité du modèle car les pôles tendent vers l'extérieur du cercle unité dans le plan complexe. Cela se voit bien si on analyse l'expression des pôles dans le domaine discret de l'équation (6.15) :

$$z_p = e^{\lambda_p T} = e^{\lambda_p / f_c}$$

On voit bien que si :

$$\lim_{f_c \rightarrow \infty} z_p \rightarrow 1 \quad (6.58)$$

Dans la pratique la fréquence d'échantillonnage est recommandée comme égale à dix fois la fréquence maximale à analyser. D'autres études recommandent plutôt une fréquence d'échantillonnage égale à trois fois la fréquence maximale d'analyse [17].



## CHAPITRE 7

### ÉTUDE THÉORIQUE ET MISE AU POINT NUMÉRIQUE

#### 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons faire une comparaison entre le critère d'Akaike et le critère de stabilité dans le choix de l'ordre du modèle. On fera également une comparaison entre les trois approches de la méthode AR et la méthode ARMA à travers une mise au point numérique. On considèrera deux cas de comparaison, le premier est le cas à un seul degré de liberté et le deuxième qui est le cas à plusieurs degrés de liberté pour lequel on se limitera à trois degrés de liberté.

#### 7.2 Cas à un seul degré de liberté

On considèrera durant toute la comparaison le cas d'une réponse impulsionnelle d'un système à un seul degré de liberté de raideur de 19739 N/m, de masse de 5kg, d'amortissement de 628,32 N.s/m, ce qui donne une fréquence naturelle de 10 Hz avec un taux d'amortissement de 1%. Une amplitude unitaire et une phase de 45 degrés ont été considérées. La fréquence d'échantillonnage choisie est de dix fois la fréquence maximale à analyser soit de 100Hz dans notre cas. On prendra 600 échantillons et un niveau de bruit de 10% (voir la figure 45).

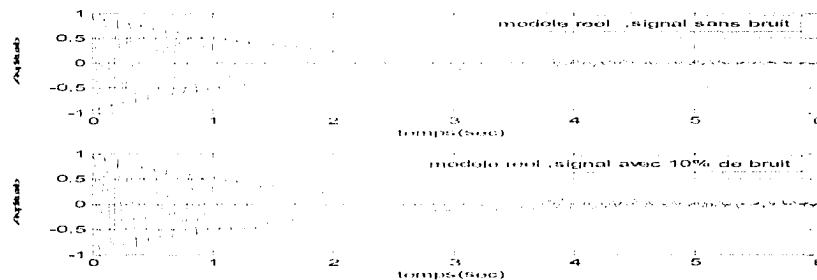


Figure 45 Réponse d'un système à un seul degré de liberté

### 7.3 Choix de l'ordre du modèle

On représente dans le tableau suivant l'ordre et l'erreur relative pour l'amortissement et la fréquence obtenue avec le critère d'Akaike pour les différentes approches.

Tableau XII

Ordres obtenus avec le critère d'Akaike

Méthode	Ordre	f (Hz) théorique	f(Ar) (Hz)	Erreur%	$\xi$ (%) théorique	$\xi$ (AR)(%)	Erreur%
covariance modifiée	118	10	9,9993	0,01	1	1,0105	1,05
Yule- Walker	8	10	9,9999	0,00	1	0,9648	3,52
Covariance	40	10	10,001	0,01	1	1,0052	0,52
ARMA	2	10	9,9993	0,007	1	0,9919	0,81

où :

$f$  est la fréquence théorique et  $f(\text{AR})$  est la fréquence estimée avec les méthodes AR et ARMA.

$\xi$  est le taux d'amortissement théorique et  $\xi(\text{AR})$  est le taux d'amortissement estimé avec les méthodes AR et ARMA.

La figure 46 montre l'erreur relative en fonction des ordres des modèles pour l'estimation de l'amortissement et de la fréquence.

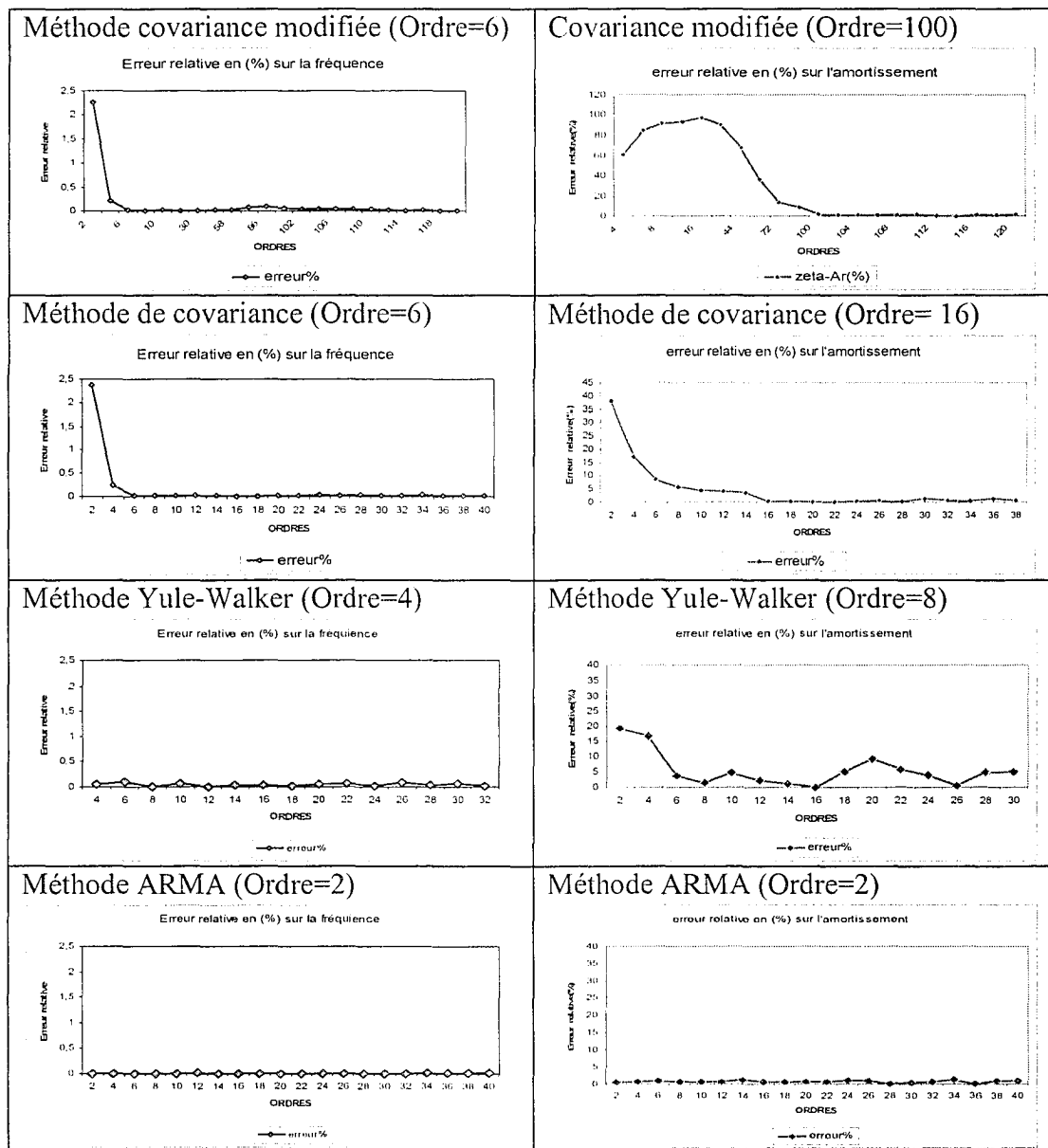


Figure 46 Erreur relative sur la fréquence et l'amortissement en fonction de l'ordre du modèle

Ceci permet d'estimer les ordres et l'erreur relative, sur l'amortissement et la fréquence, obtenus avec le critère de stabilité qu'on représente dans les tableaux suivants :

Tableau XIII

Ordres obtenus avec le critère de stabilité pour la fréquence

Méthode	Ordre	$f$ (Hz) théorique	$f(AR)$ (Hz)	Erreur (%)
covariance modifiée	6	10	9,9996	0,004
Yule-Walker	4	10	9,9955	0,045
Covariance	6	10	9,994	0,06
ARMA	2	10	9,9993	0,007

Tableau XIV

Ordres obtenus avec le critère de stabilité pour l'amortissement

Méthode	Ordre	$\xi$ (%) théorique	$\xi(AR)$ (%)	Erreur%
covariance modifiée	100	1	1,0159	1,59
Yule-Walker	8	1	0,9632	3,68
Covariance	16	1	1,0335	3,35
ARMA	2	1	0,9919	0,81

On remarque que la fréquence est estimée avec des ordres inférieurs par rapport à l'amortissement pour toutes les méthodes AR.

On remarque aussi que les ordres obtenus avec le critère d'Akaike sont légèrement différents, dans ce cas supérieurs ou égaux, à ceux obtenus avec le critère de stabilité. Par conséquent le critère d'Akaike n'est pas très précis dans l'estimation des ordres des modèles, cependant, il donne de bons résultats.

On remarque aussi que la méthode ARMA converge à des ordre très inférieurs par rapport à ceux de la méthode AR.

## 7.4 Choix de la structure du modèle

On fera une comparaison entre les différentes approches proposées selon différents critères pour choisir la structure qu'on utilisera dans les applications expérimentales.

### 7.4.1 Méthode AR

### 7.4.2 Comparaison de la précision fréquentielle

On comparant les trois approches AR, on remarque que la méthode de covariance modifiée donne des spectres plus fins, et par conséquent cette approche offre une meilleure précision fréquentielle raison pour laquelle elle est préférée par rapport aux autres approches AR. La figure 47 montre cette différence :

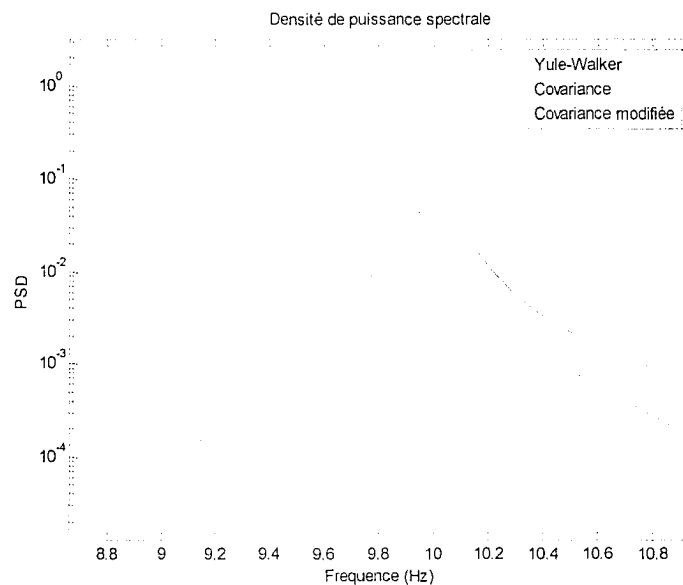


Figure 47 Comparaison des approches AR

#### 7.4.2.1 Comparaison des approches AR selon le taux d'Amortissement et le niveau de bruit

On compare les trois approches selon le taux d'amortissement allant de 1 à 90 % pour différents niveaux de bruits. L'ordre a été estimé à l'aide du critère d'Akaike.

#### 7.4.2.2 Méthode de covariance modifiée

On représente l'erreur relative sur l'amortissement pour les différents niveaux de bruit dans les figure 48 et figure 49.

On observe sur la figure 48 que pour un niveau de bruit inférieur à 5%, on peut aller jusqu'à un amortissement de 90 % avec une erreur relative inférieure à 5%. Pour un niveau de bruit de 10 %, on arrive à un amortissement de 80 % avec une erreur relative inférieure à 5% et on dépasse les 5 % d'erreur relative pour un amortissement de 90 %.

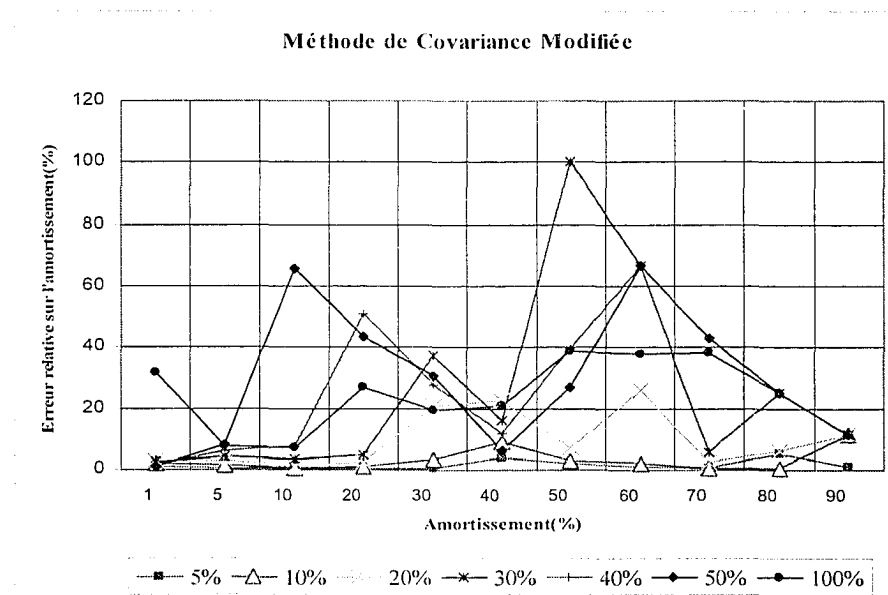


Figure 48 Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de covariance modifiée

La figure 49 permet de voir notamment les amortissements et les niveaux de bruit pour lesquels l'erreur relative sur l'amortissement est inférieure à 10 % (surface en bleu).

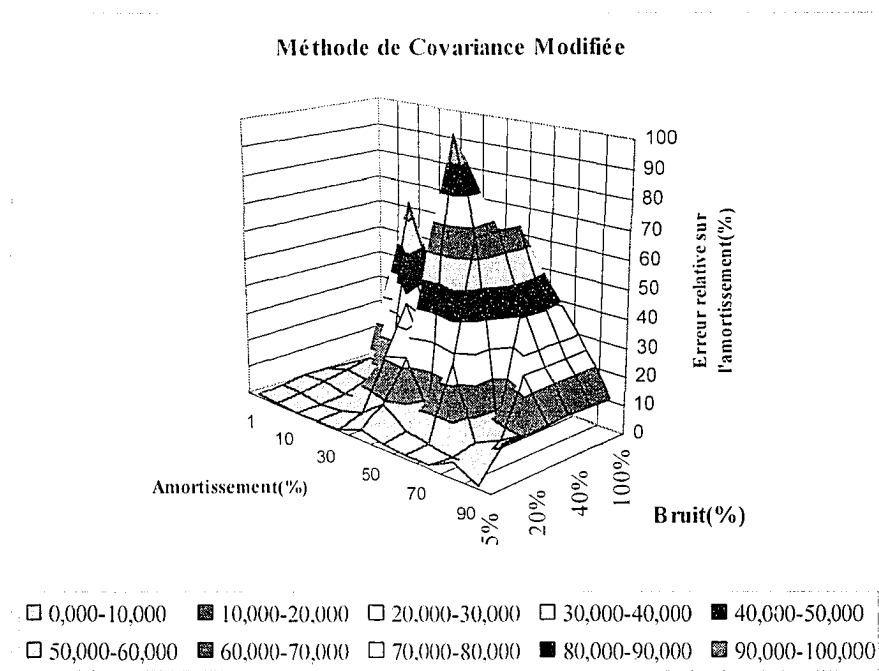


Figure 49 Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de covariance modifiée (en 3D)

D'autre part, on représente l'erreur relative sur la fréquence pour les différents niveaux de bruit en fonction de l'amortissement dans les figure 50 et figure 51. La figure 50 montre qu'à partir d'un niveau de bruit de 5%, on dépasse les 5 % d'erreur relative sur la fréquence et ce à partir d'un amortissement de 70 %. On remarque aussi qu'on arrive à un amortissement de 20 % avec un niveau de bruit de 100 % avec une erreur relative inférieure à 5 %.

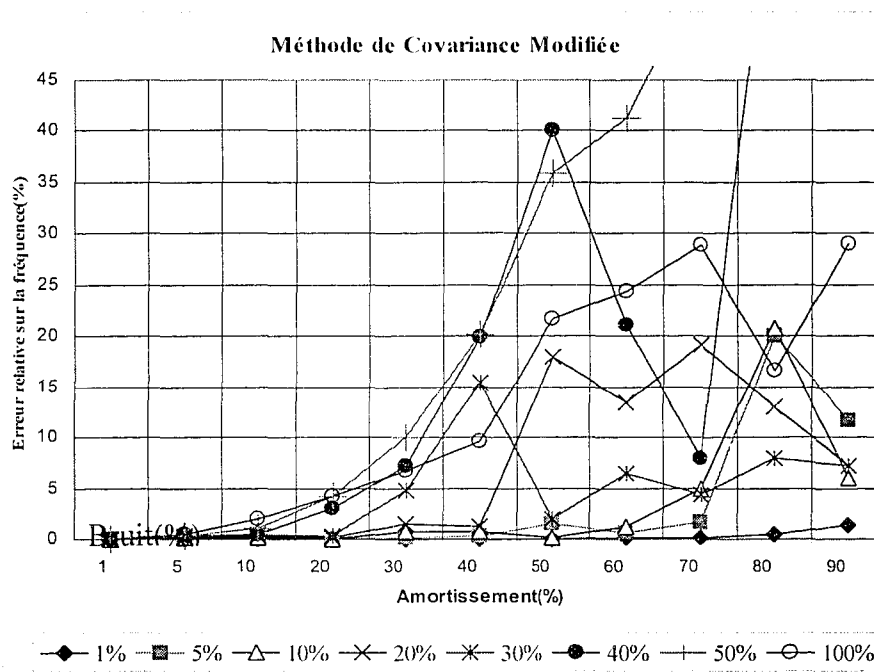


Figure 50 Erreur relative sur la fréquence en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de covariance modifiée

La figure 51 montre notamment les amortissements et les niveaux de bruit qu'on peut atteindre avec une erreur relative inférieure à 10 % sur la fréquence (Surface en bleu).

Ceci permet de voir qu'on peut avoir de meilleurs résultats en fréquence qu'en amortissement. Bien que, d'une manière générale, dans les deux cas la méthode présente un biais important pour les amortissements importants et les niveaux de bruits importants.



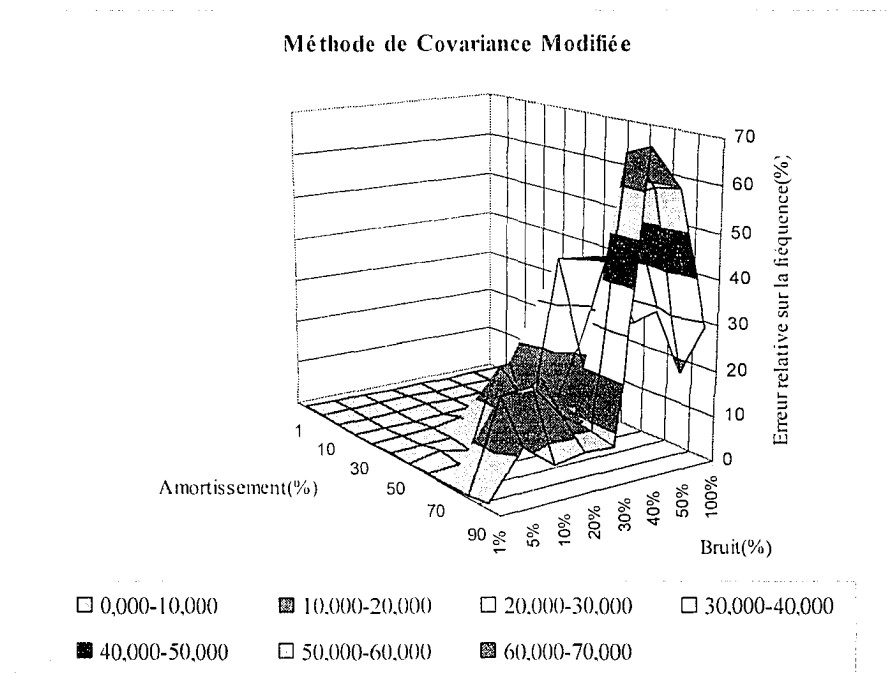


Figure 51 Erreur relative sur la fréquence en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de covariance modifiée (représentation 3D)

#### 7.4.2.3 Méthode de covariance

On représente l'erreur relative sur l'amortissement pour les différents niveaux de bruit dans les figure 52 et figure 53.

La figure 52, montre qu'à partir d'un niveau de bruit de 5 % on dépasse 5 % d'erreur relative sur l'amortissement à partir de 80 % d'amortissement.

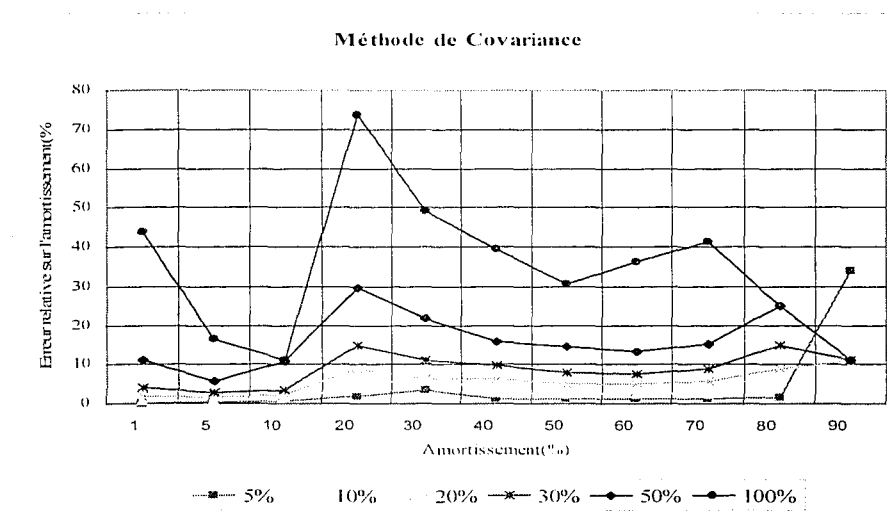


Figure 52 Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de covariance

Dans la figure 53, on peut mieux voir les amortissements et les niveaux de bruit pour une erreur relative inférieure à 10 % (surface en bleu).

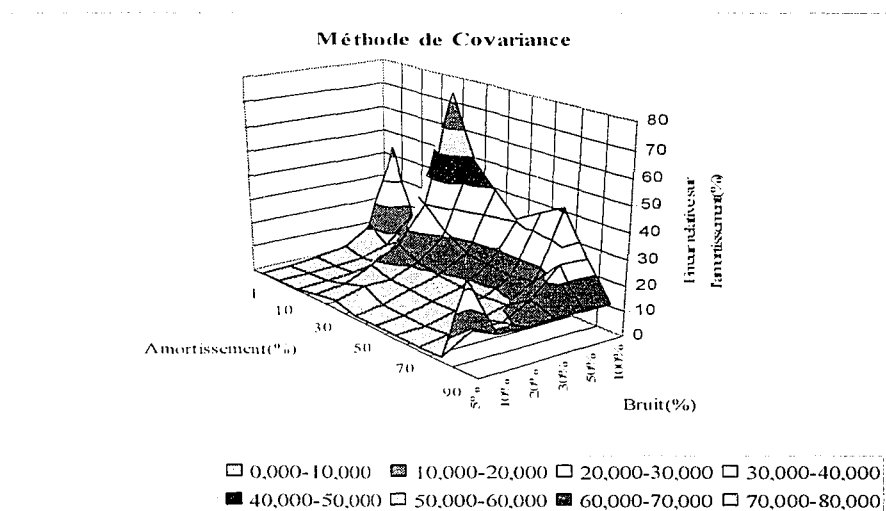


Figure 53 Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de Covariance (représentation 3D)

On représente l'erreur relative sur la fréquence pour les différents niveaux de bruit en fonction de l'amortissement dans les figure 54 et figure 55. La figure 54 montre qu'à partir d'un niveau de bruit de 5 %, on dépasse 5 % d'erreur relative sur la fréquence à partir de 80 % d'amortissement. On voit aussi qu'on peut atteindre un amortissement de 30 % pour un niveau de bruit de 50 % avec une erreur relative sur la fréquence inférieure à 5 %.

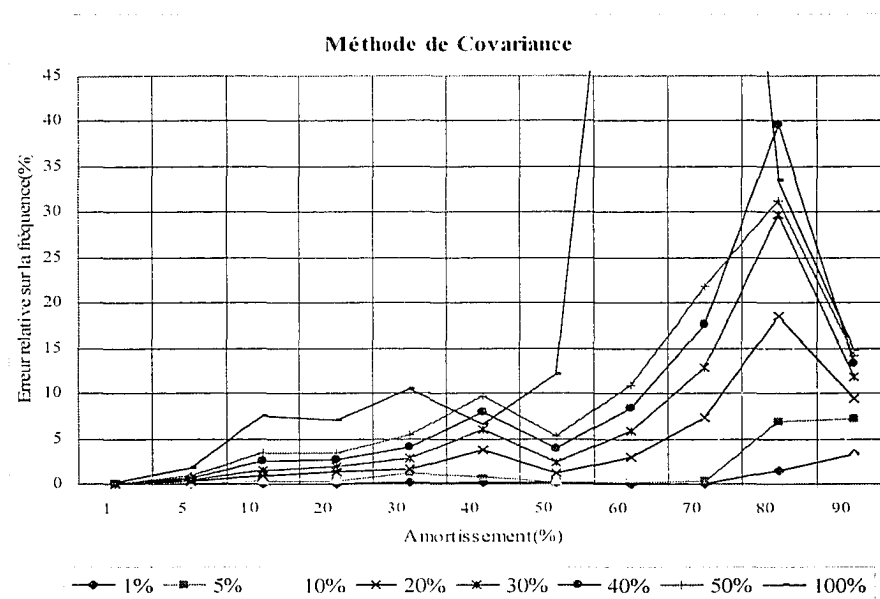


Figure 54 Erreur relative sur la fréquence en fonction de la fréquence et du niveau de bruit pour la méthode de Covariance

La figure 55 permet de mieux voir les amortissements et les niveaux de bruit qu'on peut atteindre pour une erreur relative inférieure à 10 % sur la fréquence.

Ceci permet aussi de constater que la méthode de covariance donnerait de meilleurs résultats pour l'estimation de la fréquence que pour l'estimation de l'amortissement (surface en bleu). On note aussi que la méthode présente un biais important pour les amortissement et les niveaux de bruit importants.

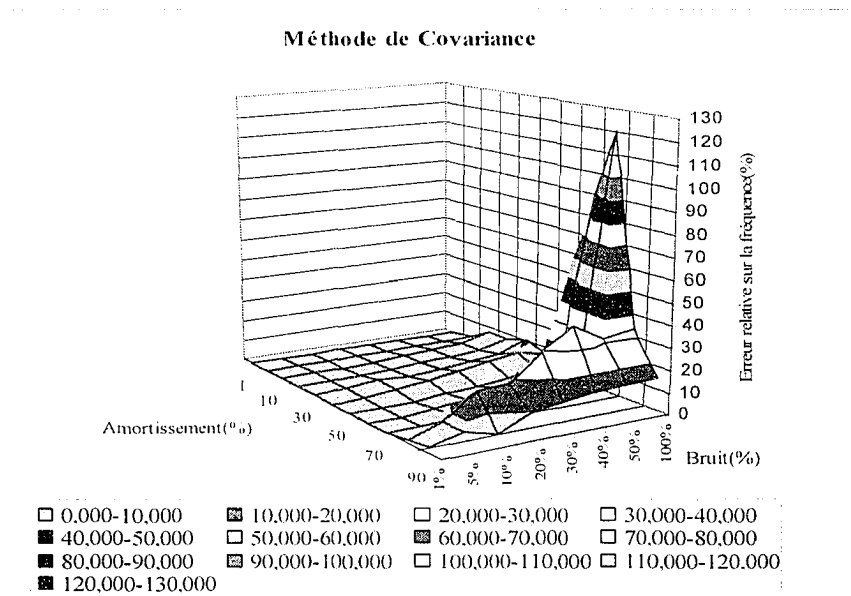


Figure 55 Erreur relative sur la fréquence en fonction de la fréquence et du niveau de bruit pour la méthode de covariance (en 3D)

#### 7.4.2.4 Méthode de Yule-Walker

On représente l'erreur relative sur l'amortissement pour les différents niveaux de bruit dans les figure 56 et figure 57.

La figure 56 montre qu'on arrive à un amortissement de 90 % pour un niveau de bruit de 20 % avec une erreur relative inférieure à 5 %.

La figure 57 permet de mieux voir les amortissements et les niveaux de bruit qu'on peut atteindre avec une erreur relative inférieure à 10 % sur l'amortissement. Ceci montre que la méthode présente un biais important sur l'estimation de l'amortissement pour les niveaux de bruit importants.

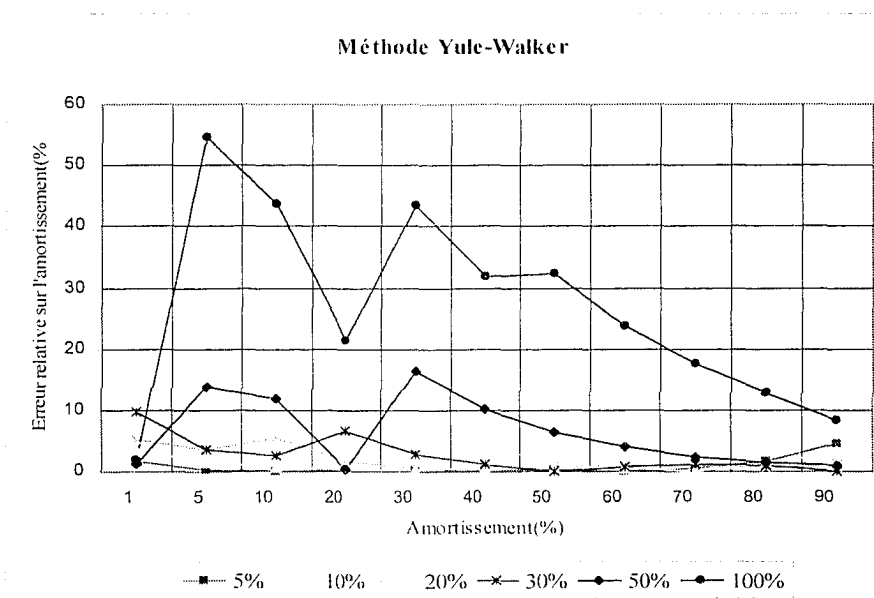


Figure 56 Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de Yule-Walker

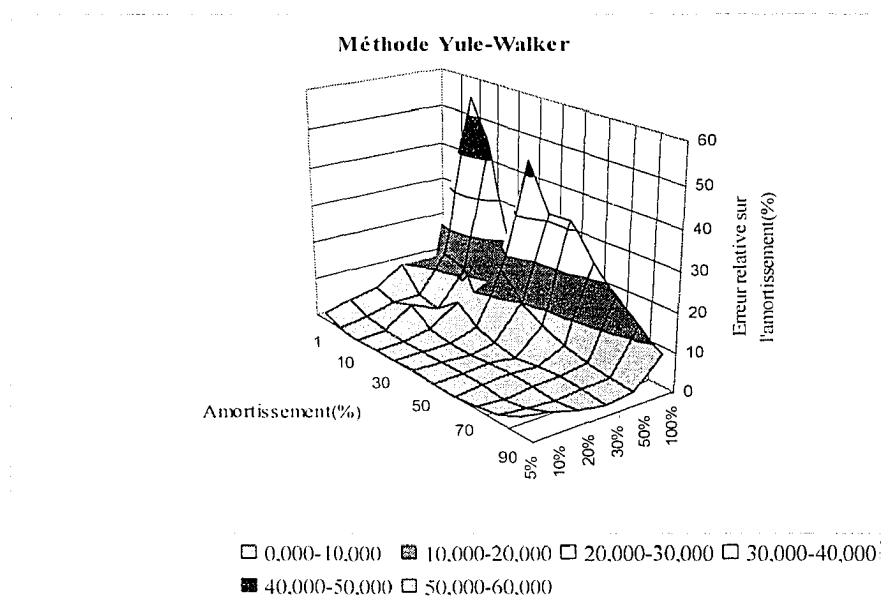


Figure 57 Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode de Yule-Walker (représentation 3D)

On représente l'erreur relative sur la fréquence pour les différents niveaux de bruit en fonction de l'amortissement dans les figure 58 et figure 59.

La figure 58 montre qu'on arrive à un amortissement de 40 % pour un niveau de bruit de 100 % avec une erreur relative inférieure à 5 % sur la fréquence et à partir d'un amortissement de 70 %, on dépasse 5 % d'erreur relative pour un niveau de bruit supérieurs à 50 %.

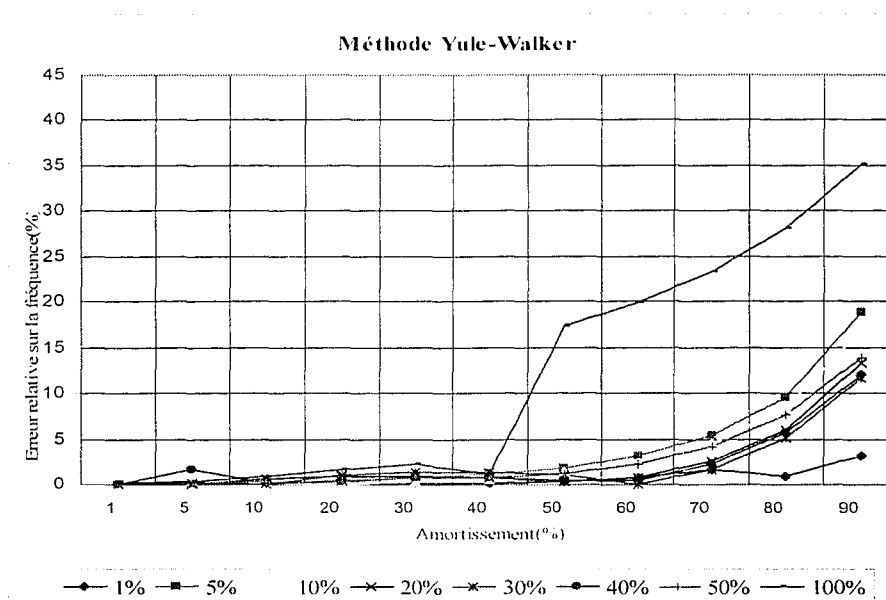


Figure 58 Erreur relative sur la fréquence en fonction de la fréquence et du niveau de bruit pour la méthode de Yule-Walker

La figure 59 permet de mieux voir d'une manière globale les amortissements et les niveaux de bruit qu'on peut atteindre pour une erreur inférieure à 5 % sur la fréquence (surface en bleu). Ceci montre que la méthode de Yule-Walker présenterait un biais important sur l'estimation de la fréquence pour les amortissements importants.

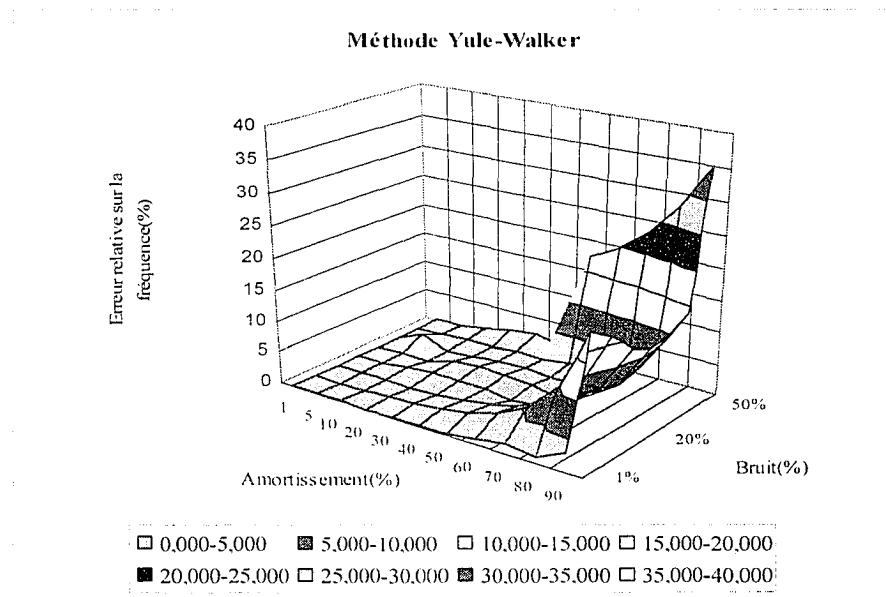


Figure 59 Erreur relative sur la fréquence en fonction de la fréquence et du niveau de bruit pour la méthode de Yule-Walker (en 3D)

#### 7.4.3 Comparaison des méthodes selon le niveau de bruit limite

On établit les niveaux de bruit limites en fonction de l'amortissement pour une erreur relative inférieure à 5 % sur l'amortissement qu'on représente dans la figure 60. On remarque que la méthode de Yule-Walker a atteint un niveau de bruit plus important pour l'estimation des amortissements par rapport aux approches de covariance modifiée (M.C.M) et de covariance (M.C). En effet pour un amortissement de 1%, on arrive à 100 % de bruit pour la méthode Yule-Walker alors qu'il est de 50 % pour la M.C.M et de 30 % pour la M.C et à partir d'un amortissement de 10 % la méthode de Yule-Walker atteint des niveaux de bruit de l'ordre de 40 % soit supérieurs au niveau de bruit limite des deux autres approches.

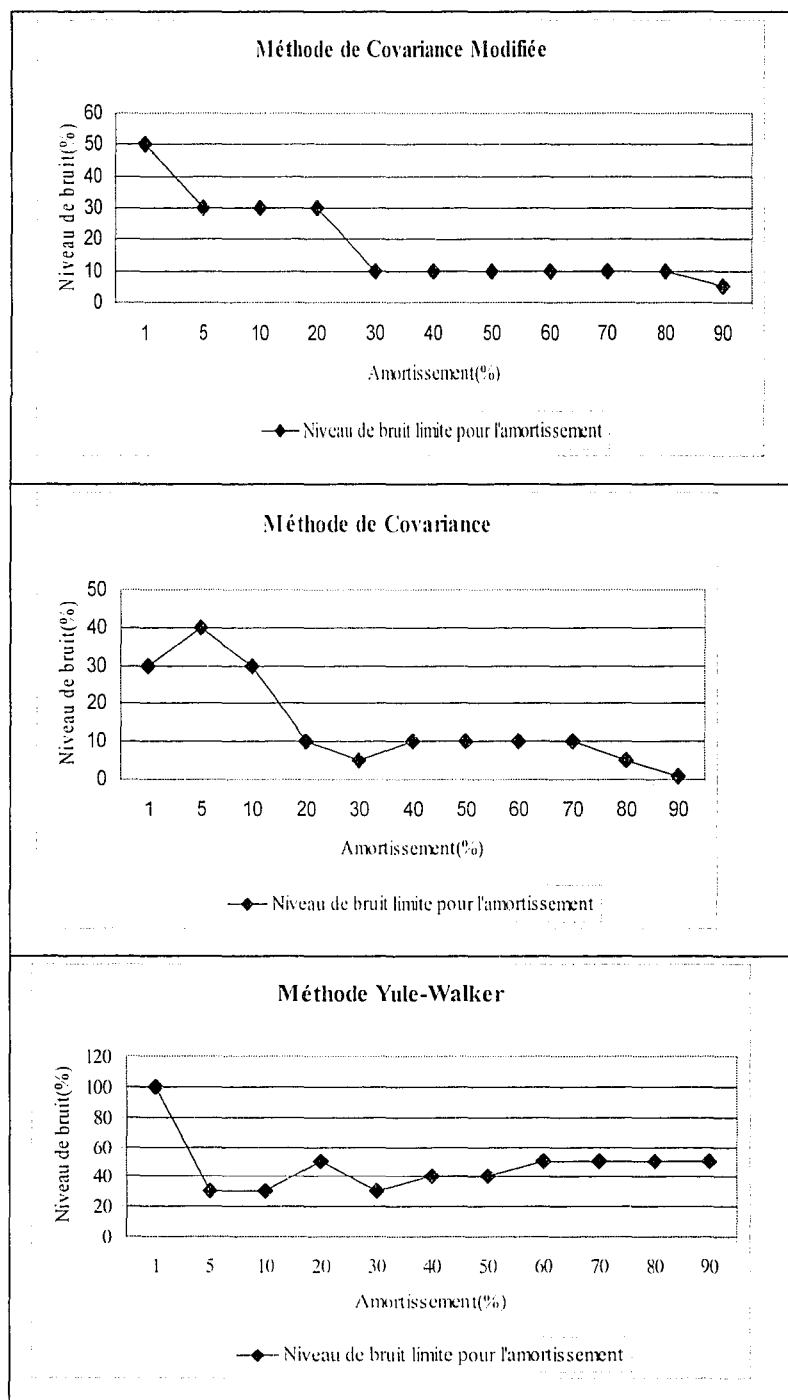


Figure 60 Niveau de bruit limite des approches AR pour l'estimation de l'amortissement



Par ailleurs, on établit les niveaux de bruit limites en fonction de l'amortissement pour une erreur relative inférieure à 5 % sur la fréquence qu'on représente dans la figure 61.

On constate, que la méthode de Yule-Walker permet d'atteindre des niveaux de bruit plus important par rapports aux autres approches pour l'estimation de la fréquence (allant jusqu'à 300 % de bruit pour les amortissements de 5 % et 10 %). Cependant à partir d'un amortissement de 80 %, les trois approches présentent un biais important dans l'estimation de la fréquence à partir d'un niveau de bruit de 5 %.

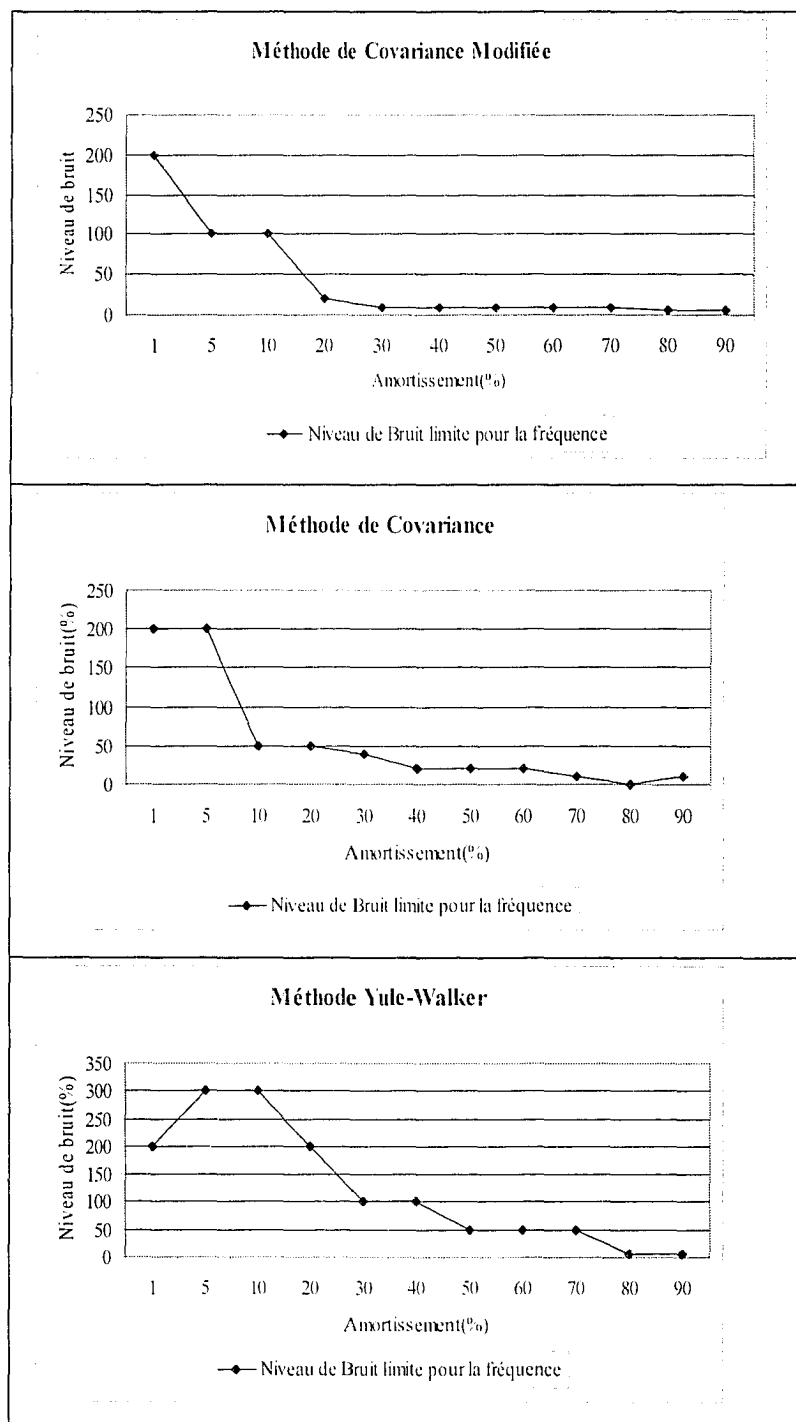


Figure 61 Niveau de bruit limite des approches AR pour l'estimation de la fréquence

## 7.5 Méthode ARMA

### 7.5.1 Précision spectrale

On obtient aussi une bonne précision fréquentielle avec la méthode ARMA. Ceci est illustré dans la figure 62.

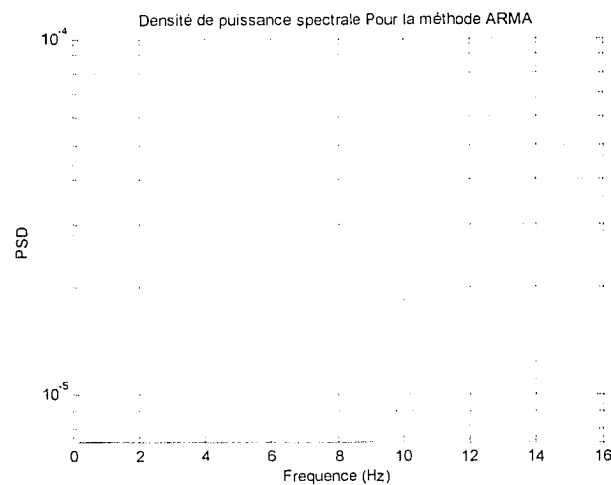


Figure 62 Densité de puissance spectrale pour le modèle ARMA

### 7.5.2 Effet du bruit sur la méthode ARMA

En variant le taux d'amortissement de 1 à 90% on détermine l'erreur relative sur l'amortissement pour différents niveaux de bruit. On présente les résultats obtenus dans les figure 63 et figure 64.

La figure 63 montre que la méthode ARMA permet d'atteindre un amortissement de 90 % jusqu'à un niveau de bruit de 30 % et qu'on peut atteindre un amortissement de 80% avec un niveau de bruit de 40 % avec une erreur relative sur l'amortissement inférieur à 5%.

On dépasse 5% d'erreur relative sur l'amortissement à partir d'un niveau de bruit de 50 % et ce pour un amortissement de 1% et les amortissements supérieurs à 50 %. On remarque aussi qu'on arrive à un amortissement de 50% avec une erreur relative inférieure à 10% sur l'amortissement.

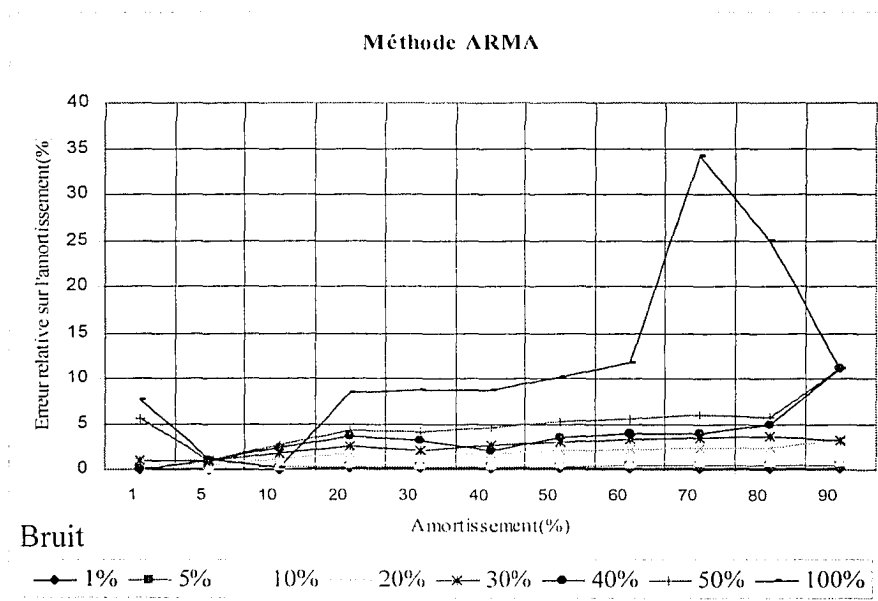


Figure 63 Erreur relative sur l'amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode ARMA

La figure 64 montre aussi les amortissements et les niveaux de bruits par la méthode ARMA. On distingue notamment les amortissements et les niveaux de bruit que l'on peut atteindre avec une erreur relative sur l'amortissement inférieure à 5 % (surface en bleu).

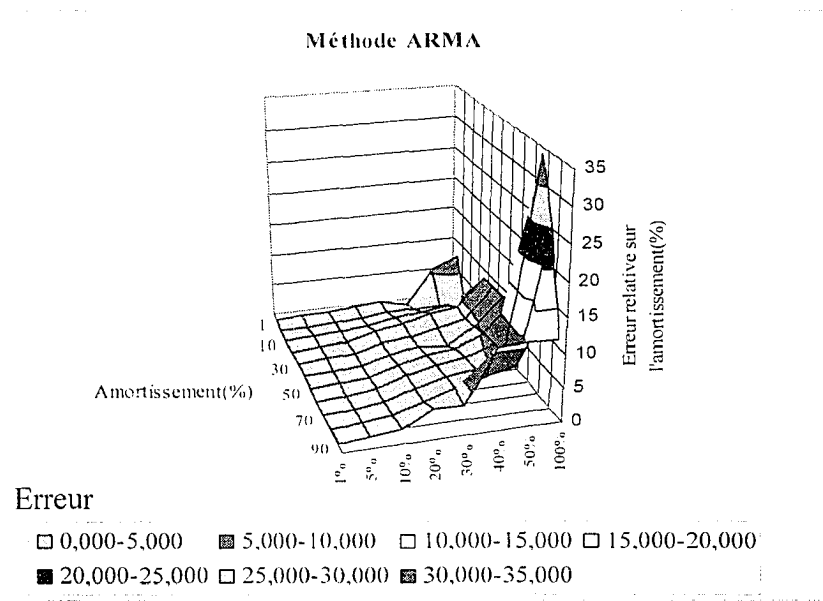


Figure 64 Erreur relative sur l'Amortissement en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode ARMA (représentation 3D)

On représente l'erreur relative sur la fréquence pour les différents niveaux de bruit en fonction de l'amortissement dans les figure 65 et figure 66.

La figure 65 montre qu'on arrive à un amortissement de 90% jusqu'à un niveau de bruit de 30 % avec une erreur relative inférieure à 2% sur la fréquence. On dépasse 5 % d'erreur relative sur la fréquence pour un niveau de bruit de 40 % à partir de 80% d'amortissement. On remarque aussi qu'on arrive à estimer la fréquence jusqu'à un amortissement de 30% pour un niveau de bruit de 200% avec une erreur relative inférieure à 2%.

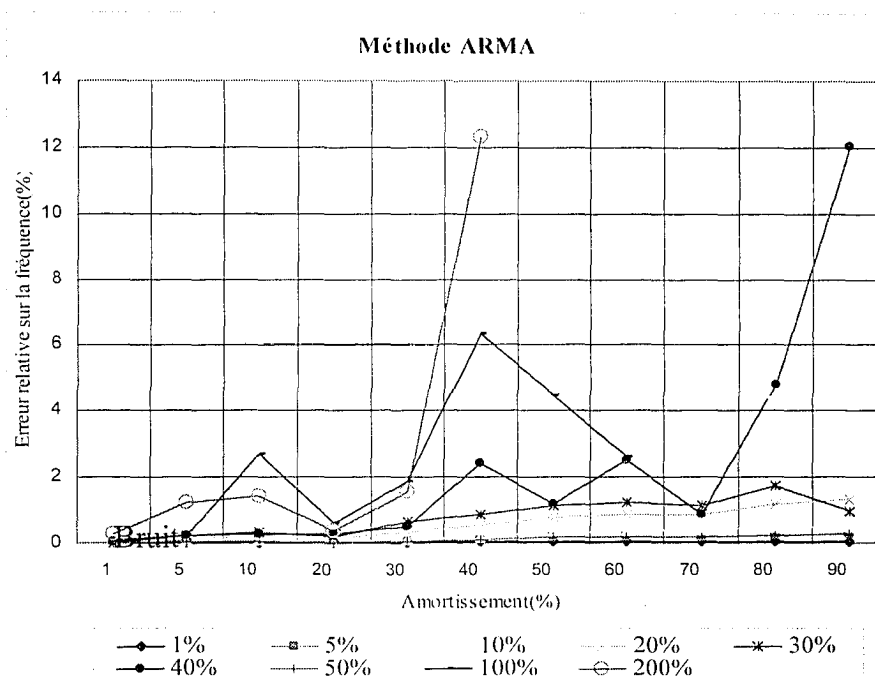


Figure 65 Erreur relative sur la fréquence en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode ARMA

La figure 66 montre aussi l'erreur sur la fréquence pour différents amortissements et niveaux de bruit. On distingue particulièrement les amortissements et les niveaux de bruit qu'on peut atteindre avec une erreur relative inférieure à 2% sur la fréquence.

Ceci montre que la méthode ARMA donne un bon estimé sur l'amortissement et surtout sur la fréquence. Cependant on remarque aussi que la méthode présente un biais important pour des niveaux de bruits et des amortissements très élevés.

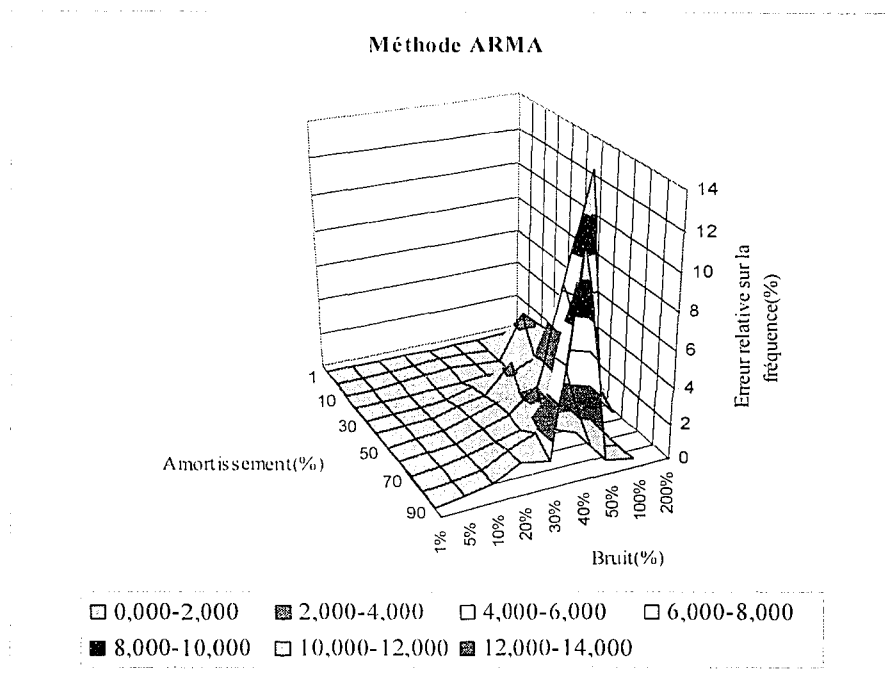


Figure 66 Erreur relative sur la fréquence en fonction de l'amortissement et du niveau de bruit pour la méthode ARMA (représentation 3D)

### 7.5.3 Niveau de bruit limite pour la méthode ARMA

On établit les niveaux de bruit limites en fonction de l'amortissement pour une erreur relative inférieure à 5 % sur la fréquence qu'on représente dans la figure 67.

On remarque qu'on arrive à des niveaux de bruits important allant jusqu'à 350% pour un amortissement de 1 % et à 200% pour les amortissements de 5% à 30%.

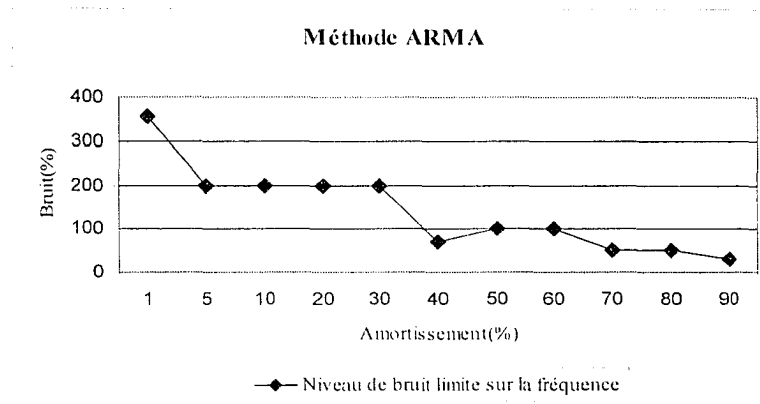


Figure 67 Bruit limite pour l'estimation de l'amortissement avec la méthode ARMA

On établit aussi les niveaux de bruit limites en fonction de l'amortissement pour une erreur relative inférieure à 5 % sur l'amortissement qu'on représente dans la figure 68.

On remarque que les niveaux de bruit limites pour l'estimation de l'amortissement sont moins importants que ceux atteints pour l'estimation de la fréquence pour une erreur relative inférieure à 5%. En effet on arrive à un niveau de bruit maximal de 100% pour les amortissements de 5% à 10%.

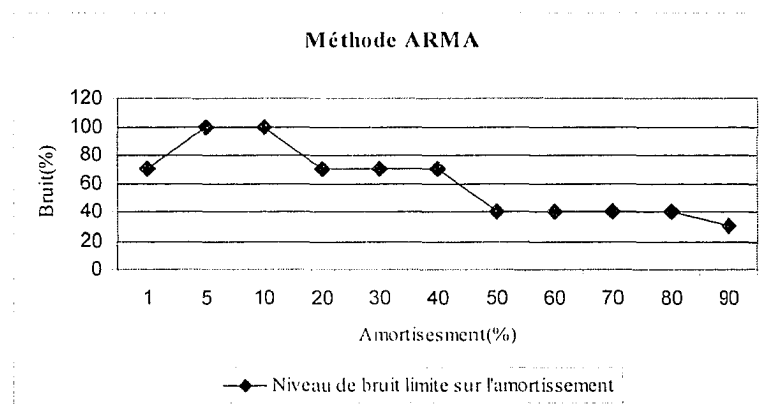


Figure 68 Bruit limite pour l'estimation de la fréquence avec la méthode ARMA



## 7.6 Conclusion

On a vu que le critère d'information d'Akaike, donne de bons résultats, bien que l'estimation de l'ordre ne soit pas précise par rapport au critère de stabilité.

L'approche de covariance modifiée, offre une meilleure précision fréquentielle par rapport aux approches de covariance et de Yule-Walker. Cependant cette dernière méthode permet d'atteindre des niveaux de bruits plus grands par rapport aux autres approches AR.

On note aussi que la méthode ARMA converge à des ordres très inférieurs par rapport aux approches AR. La méthode ARMA donne aussi de bons résultats et sur l'amortissement et sur la fréquence cependant les approches AR donneraient de meilleurs estimés en fréquence qu'en amortissements. On a remarqué aussi que la méthode ARMA permet d'atteindre des niveaux de bruit plus élevés que la méthode AR (soit 350 % de bruit). La méthode de Yule-Walker permet d'atteindre des niveaux de bruit de 300% mais elle présente un biais important pour les forts amortissements.

## 7.7 Cas d'un système à plusieurs degrés de liberté

On traite le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté par les méthodes ARMA et AR. On considère le système à trois degrés de liberté dans la figure 69 :

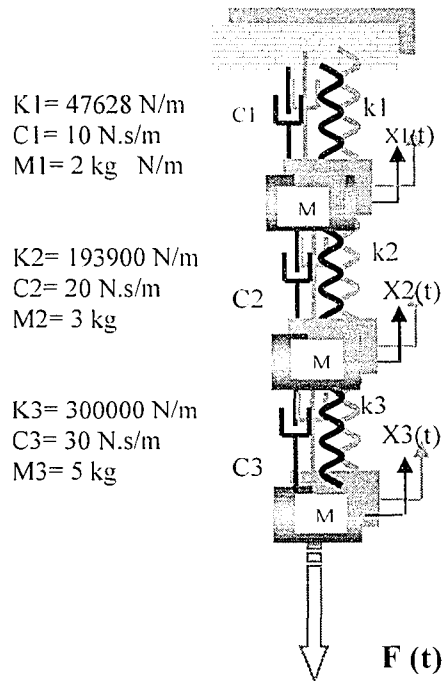


Figure 69 Système à trois degrés de liberté

Les fréquences de résonances et les amortissements de ce système sont calculés sur MATLAB. Elles sont de: 10.0001, 49.0184, 79.0328 Hz pour les fréquences de résonances, et de 0.6 %, 1.81 %, 2.59 % pour les taux d'amortissement. On prend une fréquence maximale d'analyse de 100 Hz, une fréquence d'échantillonnage de dix fois celle-ci soit de 1000 Hz et un nombre d'échantillons qu'on peut trouver sur les analyseurs disponibles soit 16384 échantillons. On fait la comparaison pour un niveau de bruit de 20 % pour toutes les méthodes.

## 7.8 Excitation impulsionnelle

On calcule sur SIMULINK la réponse de ce système à une impulsion (figure 70).

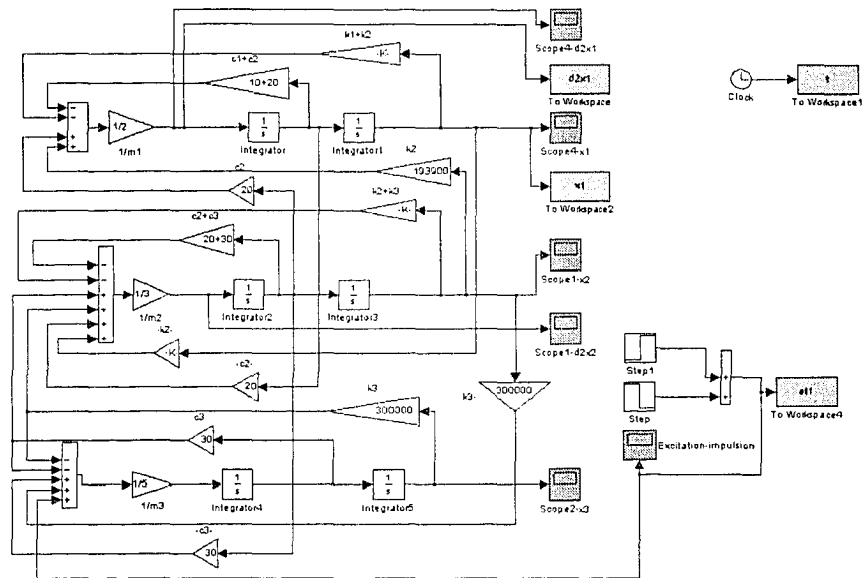


Figure 70 Simulink du système à trois degrés de liberté excité par une impulsion

La figure 71 montre la réponse impulsionnelle sans bruit et avec bruit du système à trois de degrés de liberté.

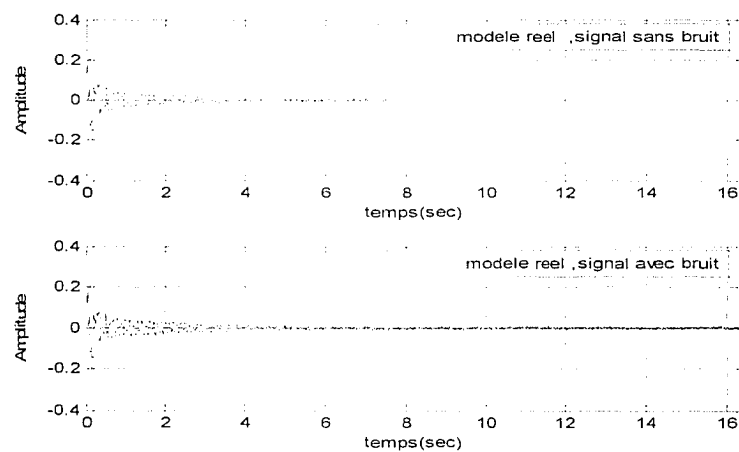


Figure 71 Réponse à une excitation impulsionnelle du système à trois de degrés de liberté

On montre dans le tableau XV les résultats de l'estimation du système en question pour les différentes méthodes :

Tableau XV

Fréquences et amortissements estimés avec les méthodes ARMA et AR dans le cas d'une réponse impulsionnelle d'un système à trois degrés de liberté

	f (Hz) théorique	f(AR) (Hz)	$\xi$ théorique	$\xi$ (AR) (%)
M.C.M	10,00	10,11	0,60	1,04
	49,02	49,13	1,81	1,84
	79,03	78,18	2,59	4,89
M.C	10,00	10,06	0,60	1,22
	49,02	49,05	1,81	1,83
	79,03	78,97	2,59	4,17
Y-W	10,00	10,18	0,60	2,06
	49,02	49,07	1,81	1,43
	79,03	78,55	2,59	3,86
ARMA	10,00	10,00	0,60	0,59
	49,02	49,02	1,81	1,83
	79,03	78,93	2,59	2,59

Le tableau XV montre que toutes les méthodes donnent un bon estimé des fréquences de résonances des trois modes. Quant à l'amortissement, on observe que la méthode ARMA donne une très bonne estimation pour les trois modes, alors que les méthodes AR présentent un biais relativement important par rapport à la méthode ARMA dans l'estimation de l'amortissement notamment au troisième mode. En effet on arrive à un amortissement de l'ordre de 4% pour les méthodes AR et un amortissement de 2,59 % pour la méthode ARMA qui représente la valeur exacte de l'amortissement au troisième mode.

On montre dans ce qui suit les densités de puissances spectrales estimées avec les différentes méthodes. La figure 72 montre une comparaison des densités de puissance spectrales (DSP) des méthodes AR, ARMA et de la méthode spectrale (le FFT)

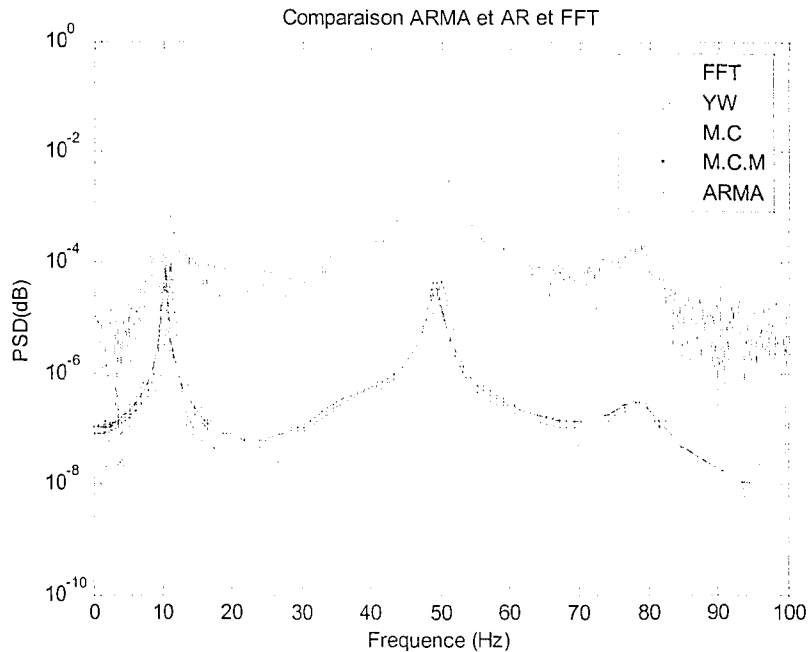


Figure 72 Comparaison des approches AR et ARMA avec la méthode spectrale

On remarque que les différentes méthodes sont en assez bonne corrélation quant à leur DSP respectives. On remarque principalement une bonne correspondance des fréquences de résonances pour toutes les méthodes, cependant la différence est visible au premier mode où le pic à la résonance de la méthode ARMA coïncide mieux avec celui de la méthode spectrale par rapport aux approches AR. Ceci est remarquable aussi aux autres modes. On remarque que le signal estimé par les méthodes AR et ARMA est débruité par rapport au FFT, ce qui constitue un avantage des méthodes paramétriques AR et ARMA par rapport au FFT.

### 7.8.1 Excitation avec un bruit blanc :

On fait la même chose qu'avec une excitation impulsionnelle pour une excitation avec un bruit blanc qu'on représente dans la figure 73.

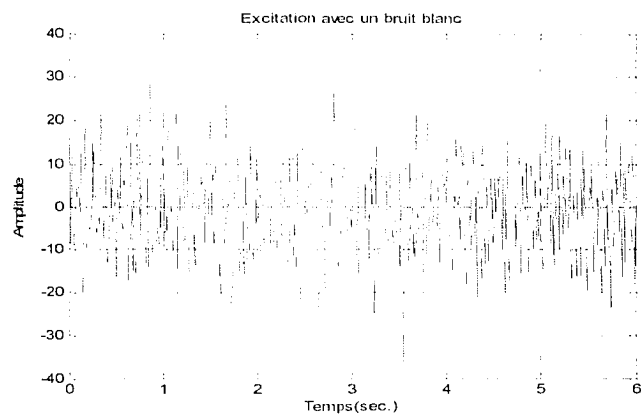


Figure 73 Bruit blanc d'entrée

La figure 74 montre la réponse du système à trois degrés de liberté à une excitation avec un bruit blanc.

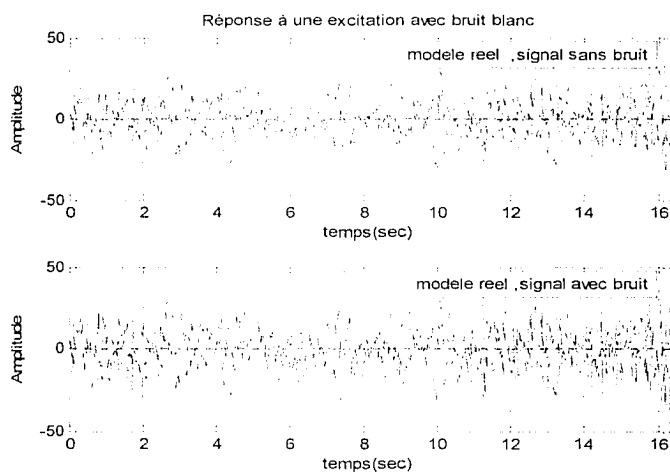


Figure 74 Réponse du système à trois degrés de liberté excité avec un bruit blanc

On montre dans le tableau XVI les résultats de l'estimation du système en question pour les différentes méthodes.

Tableau XVI

Fréquences et amortissements estimés avec les méthodes ARMA et AR dans le cas d'une réponse à un bruit blanc d'un système à trois degrés de liberté

	F (Hz)	f(AR) (Hz)	$\xi$ théorique	$\xi$ (AR)
M.C.M	10,00	10,24	0,60	3,12
	49,02	49,46	1,81	1,62
	79,03	79,42	2,59	2,32
M.C	10,00	10,24	0,60	3,07
	49,02	49,46	1,81	1,62
	79,03	79,42	2,59	2,32
Y-W	10,00	10,24	0,60	3,16
	49,02	49,45	1,81	1,62
	79,03	79,41	2,59	2,32
ARMA	10,00	10,03	0,60	0,46
	49,02	49,22	1,81	1,95
	79,03	78,99	2,59	2,68

Le tableau XVI montre que toutes les méthodes donnent un bon estimé des fréquences de résonances des trois modes dans le cas d'une réponse aléatoire. Quant à l'amortissement, on observe que la méthode ARMA donne un bon estimé pour les trois modes, alors que les méthodes AR présentent un biais relativement important par rapport à la méthode ARMA dans l'estimation de l'amortissement du premier mode.

En effet on arrive à un amortissement de l'ordre de 3% pour les méthodes AR et un amortissement de 0.46 % pour la méthode ARMA, (l'amortissement au premier mode devrait être 0,6 %).

On montre dans ce qui suit les densités de puissances spectrales estimées avec les différentes méthodes. La figure 75 montre une comparaison des densités de puissance spectrales (DSP) des méthodes AR, ARMA et de la méthode spectrale (le FFT).

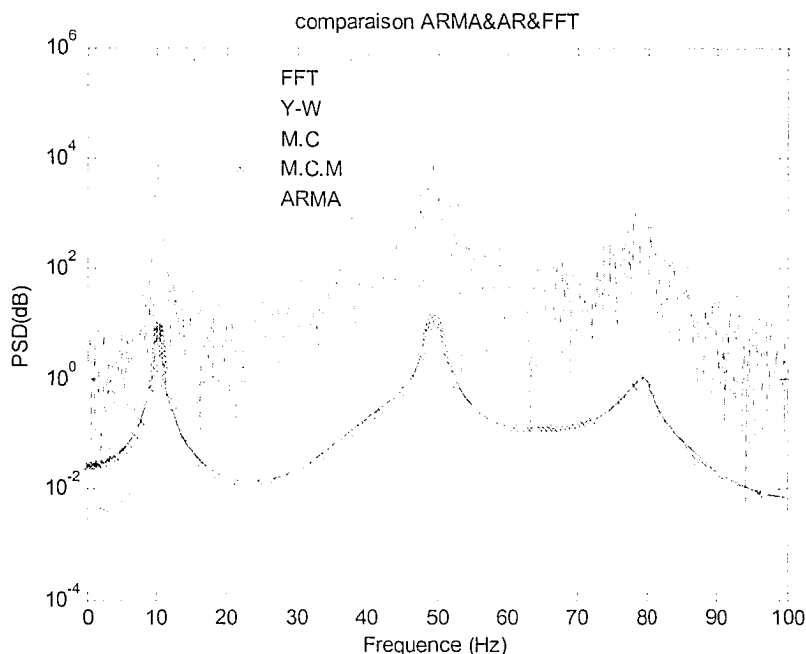


Figure 75 Comparaison des approches AR et ARMA avec la méthode spectrale (Réponse aléatoire)

On remarque que les différentes méthodes sont en assez bonne corrélation quant à leur DSP respectives. On remarque cependant principalement la différence au premier mode où le pic à la résonance de la méthode ARMA coïncide mieux avec celui de la méthode spectrale par rapport aux approches AR. On remarque aussi que le signal estimé par les méthodes AR et ARMA est débruité par rapport au FFT, ce qui constitue un avantage des méthodes paramétriques AR et ARMA par rapport au FFT.

### 7.8.2 Conclusion

On a vu le cas à plusieurs degrés de libertés des approches AR, ARMA et de la méthode spectrale (FFT). On a vu que toutes les méthodes donnent une bonne estimation de la fréquence de résonance. Quant à l'amortissement, il n'y a pas une différences trop significative entre toutes les méthodes. Cependant on remarque que la méthode ARMA donnent des amortissements plus précis par rapport à la méthode AR.



## CHAPITRE 8

### APPLICATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION DANS LE DOMAINE TEMPORELLE SUR LA STRUCTURE OISEAU DE L'IREQ

#### 8.1 Analyse modale dans l'air

On excite la structure avec un marteau d'impact, et avec un nombre d'échantillon de 16384 et un temps d'observation de 12,8 secondes. On obtient la réponse temporelle dans la figure 76.

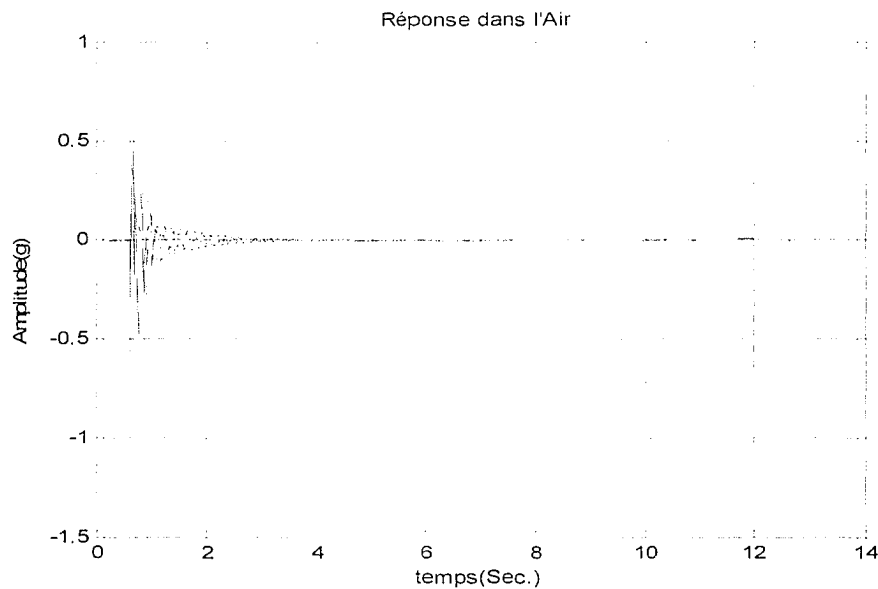


Figure 76 Réponse temporelle de la structure oiseau dans l'air

En utilisant la méthode ARMA et en comparant avec la méthode dans le domaine spectral, on obtient les résultats dans le tableau XVII.

Tableau XVII

Comparaison dans l'air de la méthode ARMA avec la méthode spectrale pour la structure oiseau

	Paramètre					
	$\omega$ (Hz)			$\xi$ (%)		
	MÉTHODE			MÉTHODE		
	Spectrale	ARMA	Erreur	Spectrale	ARMA	Erreur
Mode1	38	38	0,039	0,51	0,42	0,088
Mode2	105	105	0,086	0,59	0,60	0,002
Mode3	137	137	0,123	0,91	0,99	0,083
Mode4	219	218	0,282	0,50	0,56	0,059
Mode5	318	318	0,194	0,33	0,28	0,053
Mode6	394	394	0,349	0,59	0,59	0,001

On calcule l'erreur absolue. On constate qu'on identifie dans ce cas, les mêmes fréquences avec les deux méthodes. Les amortissements estimés sont aussi très proches.

On présente dans la figure 77, le PSD obtenu dans l'air avec la méthode ARMA. Le premier mode qu'on remarque autour de la fréquence 7 Hz est un mode du montage du support de la structure oiseau.

La figure 78 compare la densité de puissance spectrale mesuré expérimentalement (donc le PSD calculé avec le FFT) avec le PSD estimé avec la méthode ARMA de la structure oiseau dans l'air. Ceci montre une très bonne corrélation entre les deux méthodes spectrale et ARMA. On note ici que le signal mesuré ne contient pas un bruit important.

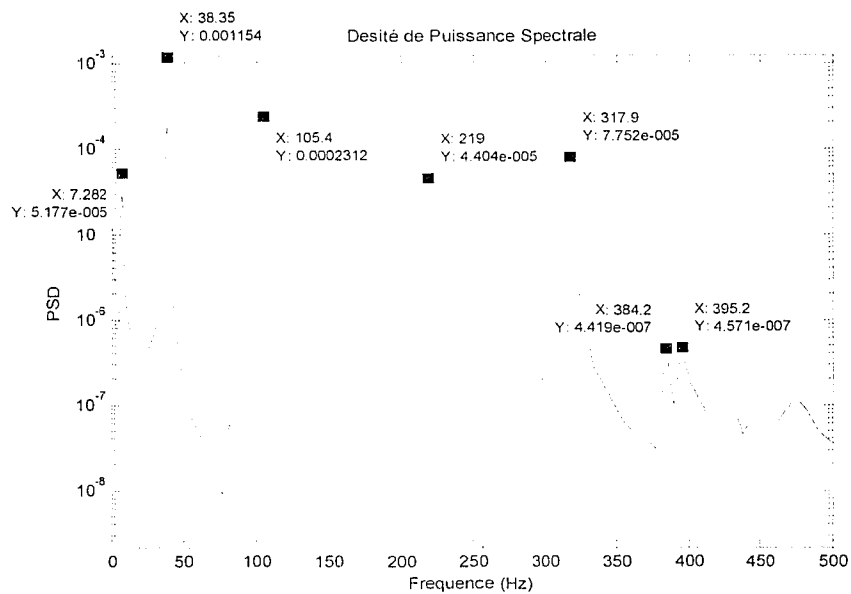


Figure 77 PSD estimé dans avec la méthode ARMA,échelle logarithmique (structure oiseau dans l'air)

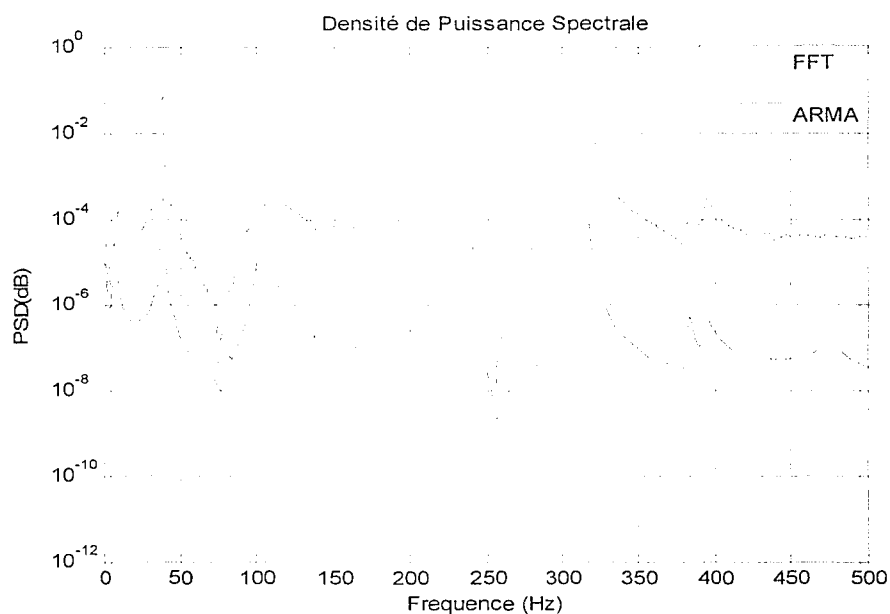


Figure 78 Comparaison du PSD mesuré (calculé avec le FFT) versus le PSD estimé avec la méthode ARMA (structure oiseau dans l'air)

## 8.2 Comparaison ARMA et AR

On considère le cas de la structure oiseau dans l'air où la réponse de celle-ci n'est pas très bruitée. On estime les amortissements  $\xi(\%)$  et les fréquences de résonances  $f(Hz)$  avec les méthodes AR et ARMA et on compare entre les différents résultats dans le tableau suivant :

Tableau XVIII  
Comparaison AR/ARMA

	Méthode							
	M.C.M		Y-W		M.C		ARMA	
	$f(Hz)$	$\xi(\%)$	$f(Hz)$	$\xi(\%)$	$f(Hz)$	$\xi(\%)$	$f(Hz)$	$\xi(\%)$
Mode1	38	0,53	38	0,53	38	0,53	38	0,42
Mode2	105	0,50	105	0,50	105	0,50	105	0,60
Mode3	133	5,07	133	5,08	133	5,07	137	0,99
Mode4	219	0,46	219	0,46	219	0,46	218	0,56
Mode5	318	0,27	318	0,27	318	0,27	318	0,28
Mode6	396	0,60	396	0,60	396	0,60	394	0,59

### 8.2.1 Comparaison les différentes méthodes

On montre dans les figures 79 et 80 une comparaison entre les différentes méthodes. Ces différentes figures montrent qu'il n'y a pas une différence significative entre les différentes approches dans l'estimation de la fréquence de résonances. Cependant on observe que la méthode ARMA et spectrale (FFT) sont mieux corrélés en amortissement. On voit donc que le biais de l'estimation pour les méthodes AR apparaît beaucoup plus sur l'amortissement.

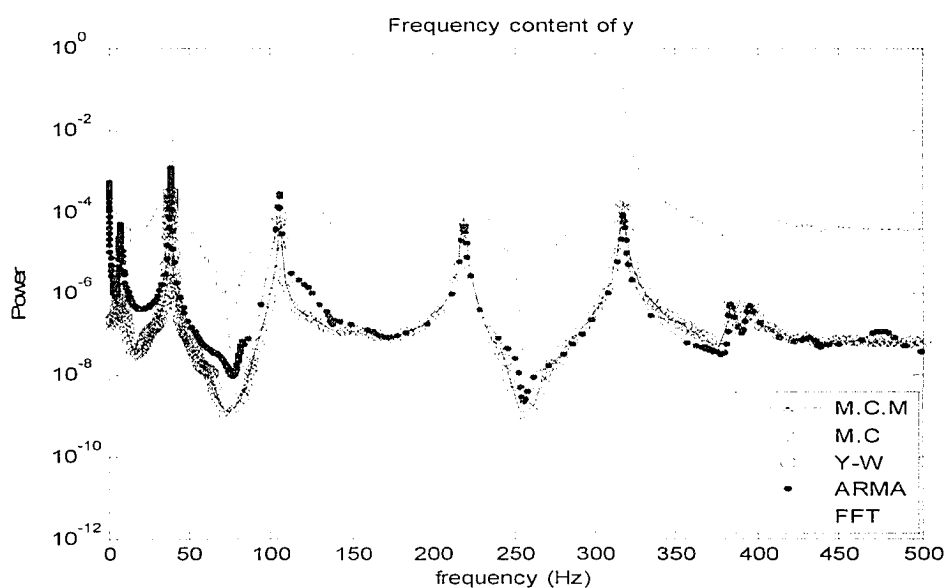


Figure 79 Comparaison du PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et ceux obtenus avec les méthodes AR et ARMA (tout les modes de la structure oiseau dans l'air)

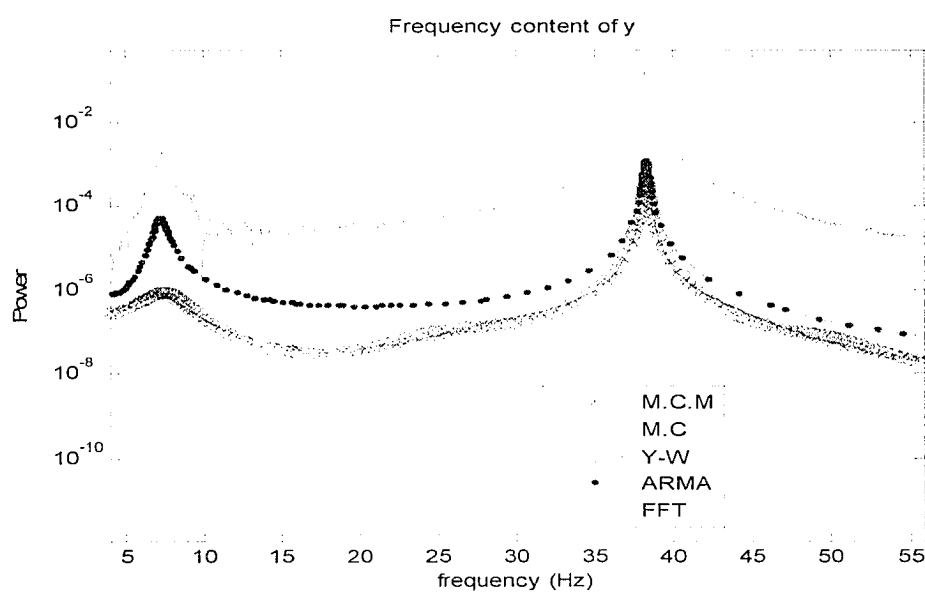


Figure 80 Comparaison du PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et ceux obtenus avec les méthodes AR et ARMA (premier mode de la structure oiseau dans l'air)

### 8.3 Analyse modale dans l'eau stagnante

La réponse temporelle dans l'eau stagnante est montrée dans la figure 81.

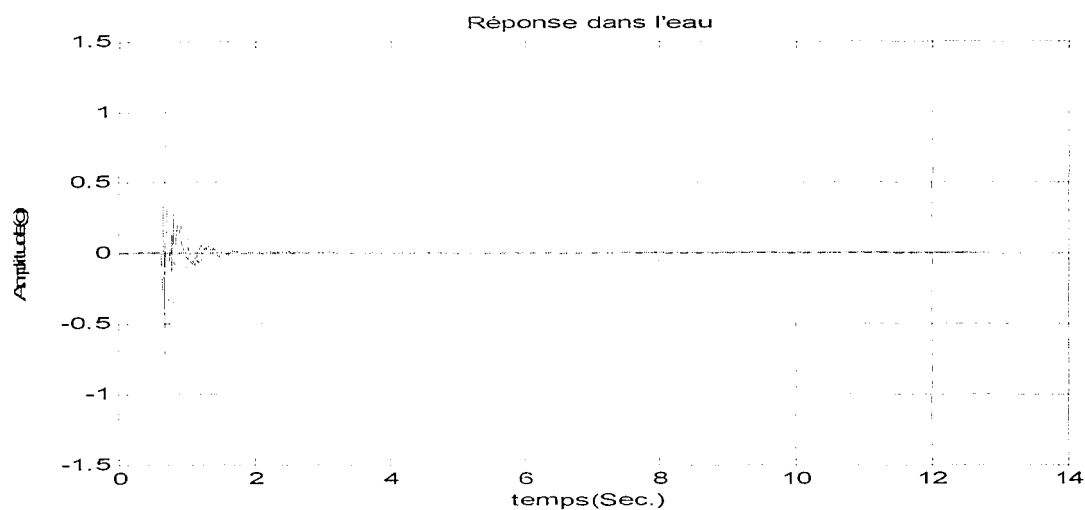


Figure 81 Réponse du modèle réduit de la structure oiseau dans l'eau stagnante

En comparant la méthode ARMA avec la méthode spectrale, on obtient le tableau XIX.

On remarque qu'on trouve pratiquement les mêmes résultats avec les deux méthodes. Par ailleurs, on fait remarquer que le signal mesuré dans l'air n'est pas très bruité.

Tableau XIX

Comparaison dans l'eau stagnante de la méthode ARMA avec la méthode spectrale pour la structure oiseau

	$\omega$ (Hz)			$\xi$ (%)		
	MÉTHODE			MÉTHODE		
	Spectrale	Temporelle	Erreur *	Spectrale	Temporelle	Erreur *
Mode1	17	170	0,020	0,93	0,87	0,055
Mode2	42	42	0,074	0,46	0,41	0,052
Mode3	79	78	0,521	0,37	0,79	0,427
Mode4	95	95	0,064	0,45	0,43	0,022
Mode5	150	148	5,836	1,79	1,82	0,033
Mode6	206	206	0,167	0,66	0,65	0,009
Mode7	265	265	0,016	0,32	0,30	0,022
Mode8	340	340	0,199	0,44	0,33	0,110
Mode9	362	363	0,077	0,55	0,53	0,015
Mode10	381	381	0,09	0,43	0,42	0,41
Mode11	401	401	0,107	0,40	0,40	0,000

On présente dans la figure 82 le PSD obtenu dans l'air avec la méthode ARMA. Le premier mode qu'on remarque autour de la fréquence 7 Hz est un mode du montage du support de la structure oiseau.

La figure 83 compare la densité de puissance spectrale mesurée expérimentalement (donc le PSD calculé avec le FFT) avec le PSD estimé avec la méthode ARMA de la structure oiseau dans l'eau stagnante. Ceci montre une très bonne corrélation entre les deux méthodes spectrale et ARMA. On note encore ici, que le signal mesuré n'est pas très bruité.

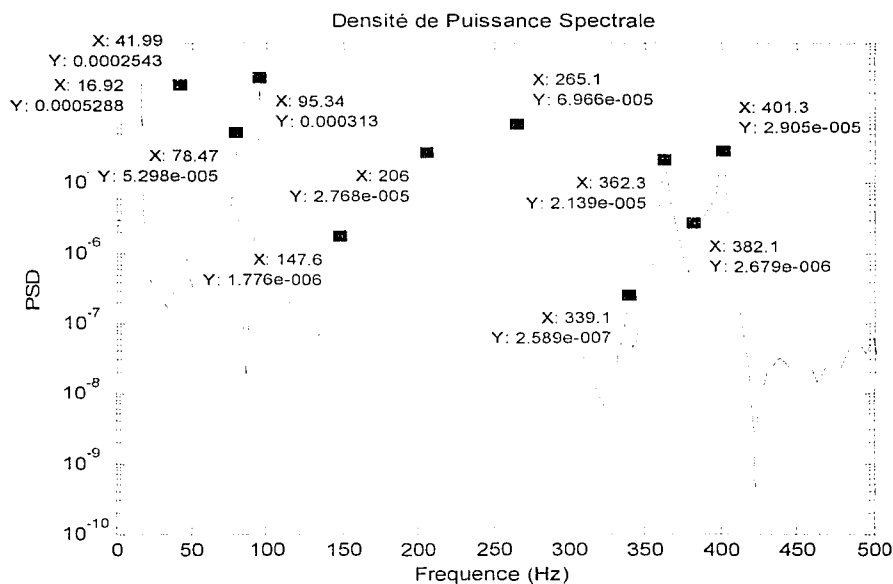


Figure 82 PSD estimé dans avec la méthode ARMA, échelle logarithmique (structure oiseau dans l'eau stagnante)

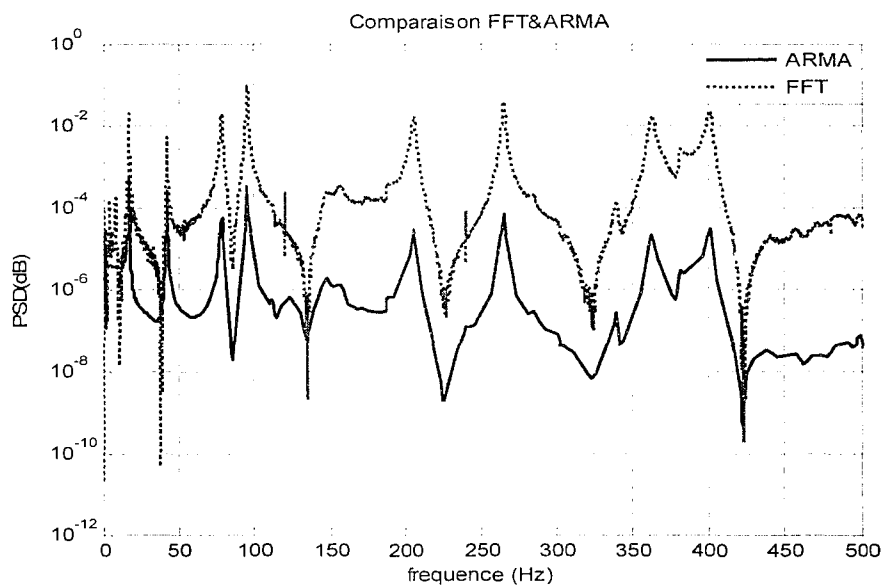


Figure 83 Comparaison du PSD mesuré (calculé avec le FFT) versus le PSD estimé avec la méthode ARMA (structure oiseau dans l'eau stagnante)



### 8.3.1 Mise en évidence de la masse ajoutée

En comparant les résultats mesurés dans l'air et ceux mesurés dans l'eau, on obtient les résultats dans le tableau suivant :

Tableau XX

Comparaison Eau/Air pour la structure oiseau (Méthode ARMA)

	Méthode ARMA					
	Paramètre					
	$\omega$ (Hz)			$\xi$ (%)		
	AIR	EAU	Rapport Eau/Air	AIR	EAU	Rapport Eau/Air
Mode1	38	17	0,44	0,42	0,87	2,069
Mode2	105	42	0,40	0,60	0,41	0,690
Mode3	137	78	0,57	0,99	0,79	0,799
Mode4	218	95	0,44	0,56	0,43	0,764
Mode5	318	148	0,47	0,28	1,82	6,533
Mode6	394	206	0,52	0,59	0,65	1,103
Mode7	-	265	-	-	0,30	-
Mode8	-	340	-	-	0,33	-
Mode9	-	363	-	-	0,53	-
Mode10	-	381	-	-	0,42	-
Mode11	-	401	-	-	0,40	-

On constate un rapport moyen de l'ordre de 0,45 entre les fréquences de résonance mesurée dans l'air et les fréquences de résonances mesurées dans l'eau, ce qui confirme l'effet de la présence de l'eau et par conséquent celui de la masse ajoutée.

On constate aussi un léger amortissement ajouté en eau stagnante, positif ou négatif selon le mode considéré. L'amortissement négatif pour les modes 2,3 et 4 est de l'ordre de 75%.

#### 8.4 Analyse modale dans l'eau en écoulement

On immerge la structure oiseau à une profondeur de 15 cm dans l'eau et on l'excite avec un écoulement turbulent. On utilise une pompe du type Little Giant Pumps MODEL T-1 d'un débit de 0,2 litre par seconde, on provoque un écoulement d'eau à partir d'un jet d'eau d'une vitesse de 2 m/s (la vitesse a été mesurée en divisant le débit sur la section du tuyau). L'installation est illustrée dans la figure 84.

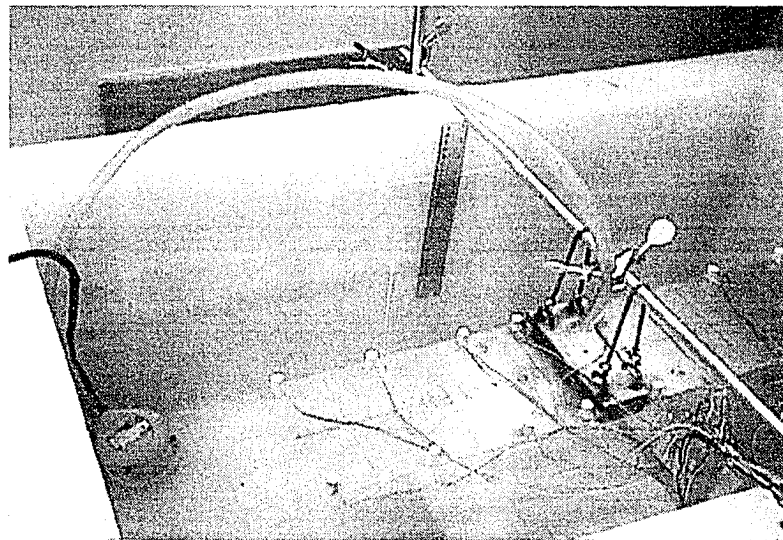


Figure 84 Banc d'essais d'écoulement (structure oiseau)

On représente la réponse temporelle sous l'écoulement d'eau dans la figure 85 (vitesse du jet d'eau de 2 m/s).

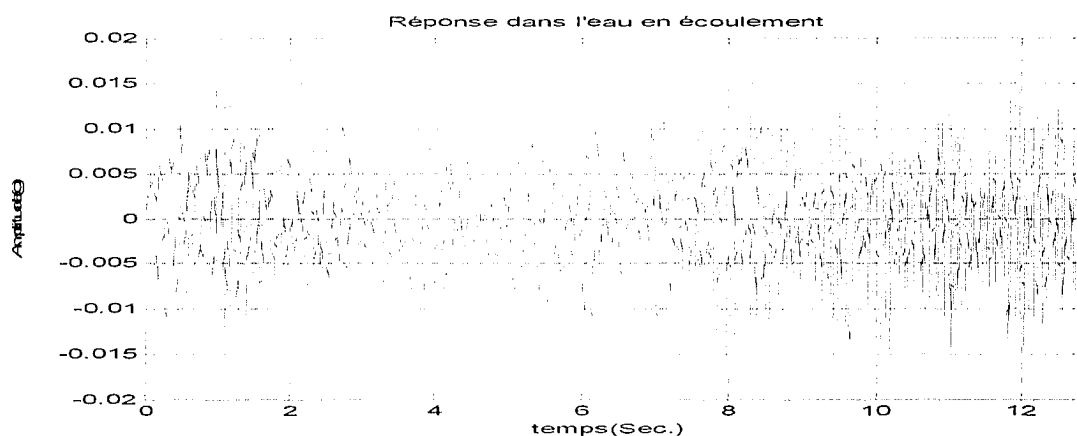


Figure 85 Réponse de la structure oiseau excitée avec un écoulement turbulent

On utilise la méthode ARMA pour identifier les paramètres modaux et on obtient le tableau suivant.

Tableau XXI

Paramètres modaux mesurés avec la méthode ARMA sous écoulement de la structure oiseau

	MÉTHODE ARMA	
	Paramètre	
	$\omega$ (Hz)	$\xi$ (%)
Mode1	17	2,41
Mode2	42	0,36
Mode3	78	0,78
Mode4	95	0,58
Mode5	151	1,53
Mode6	206	0,73
Mode7	265	0,32
Mode8	338	0,53
Mode9	363	1,03
Mode10	382	0,58
Mode11	401	0,36

#### 8.4.1 Mise en évidence de l'amortissement ajouté

En comparant les mesures obtenues dans l'air avec ceux obtenu dans l'eau en écoulement, on obtient le tableau suivant :

Tableau XXII

Comparaison Air/Écoulement pour la structure oiseau

	Paramètre					
	$\omega$ (Hz)			$\xi$ (%)		
	MÉTHODE			MÉTHODE		
	Air	Écoulement	Rapport	Air	Écoulement	Rapport
Mode1	38	17	0,44	0,42	2,41	5,73
Mode2	105	42	0,40	0,60	0,36	0,61
Mode3	137	78	0,57	0,99	0,78	0,79
Mode4	218	95	0,44	0,56	0,58	1,04
Mode5	318	151	0,48	0,28	1,53	5,48
Mode6	394	206	0,52	0,59	0,73	1,23
Mode7	-	265	-	-	0,32	-
Mode8	-	338	-	-	0,53	-
Mode9	-	363	-	-	1,03	-
Mode10		382	-	-	0,58	-
Mode11	-	401	-	-	0,36	-

Pour la fréquence de résonance, on constate les mêmes rapports des fréquences sous écoulement par rapport à l'air que ceux trouvés dans la comparaison des fréquences dans l'eau stagnante par rapport à l'air (les fréquences de résonances en écoulement sont les même celle sans écoulement). D'autre part, on constate une augmentation d'un rapport de l'ordre de 6 de l'amortissement au premier mode, ceci met en évidence un amortissement ajouté de l'ordre de 6 fois, au premier mode dû à l'écoulement. On constate pratiquement les mêmes rapports par rapport à l'eau stagnante pour les autres modes. On relève que l'amortissement ajouté est négatif pour les modes 2 et 3; en effet

les rapports des amortissements par rapport à l'air sont inférieurs à l'unité pour ces deux modes, ce qui signifie une diminution de l'amortissement.

La figure 86 montre la comparaison entre le PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et celui obtenu avec la méthode ARMA de la structure oiseau dans l'eau en écoulement :

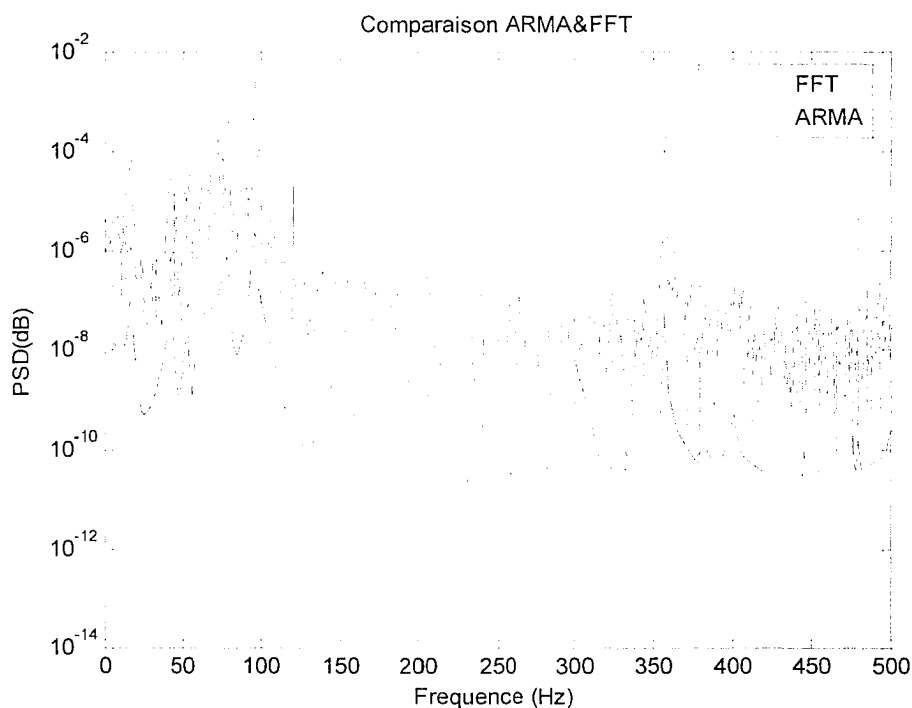


Figure 86 Comparaison du PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et celui obtenu avec la méthode ARMA (structure oiseau dans l'eau en écoulement)

On remarque une assez bonne corrélation entre les deux méthodes spectrale et ARMA au niveau des pics. Néanmoins, les modes sont beaucoup plus nets sur le PSD de la méthode ARMA. En effet, le PSD de la méthode spectrale est noyé dans le bruit.

### 8.4.2 Comparaison des méthodes AR et ARMA

On considère cette fois le cas de la structure oiseau dans l'eau en écoulement où la réponse de celle-ci contient un bruit élevé par rapport aux cas de la réponse dans l'air et dans l'eau stagnante. On estime les amortissements  $\xi(\%)$  et les fréquences de résonances  $f(Hz)$  avec les méthodes AR et ARMA et on compare entre les différents résultats.

Tableau XXIII

Comparaison AR/ARMA (écoulement)

	Méthode							
	M.C.M		Y-W		M.C		ARMA	
	$f(Hz)$	$\xi(\%)$	$f(Hz)$	$\xi(\%)$	$f(Hz)$	$\xi(\%)$	$f(Hz)$	$\xi(\%)$
Mode1	17	0,95	17	1,05	17	0,97	17	2,41
Mode2	42	0,38	42	0,39	42	0,37	42	0,36
Mode3	78	1,02	78	1,06	78	1,02	78	0,78
Mode4	95	0,74	95	0,70	95	0,74	95	0,58
Mode5	157	2,59	157	2,63	157	2,61	151	1,53
Mode6	206	0,84	206	0,85	206	0,85	206	0,73
Mode7	265	0,62	265	0,65	265	0,62	265	0,32
Mode8	341	1,18	342	1,28	341	1,18	338	0,53
Mode9	363	1,09	363	1,0905	363	1,09	363	1,03
Mode10	383	1,25	383	1,27	383	1,25	382	0,58
Mode11	401	0,47	401	0,47	401	0,47	401	0,36

On remarque que les méthodes AR et ARMA donnent les mêmes fréquences de résonances. Quant à l'amortissement, les méthodes AR donnent pratiquement les mêmes valeurs. Cependant on remarque une différence entre les amortissements estimés par les méthodes AR et ARMA qui est surtout remarquable au premier mode. En effet on mesure un amortissement de 2,41 % avec la méthode ARMA alors qu'il est de l'ordre de 1% avec la méthode AR.

### 8.4.3 Comparaison entre les différentes méthodes

On montre dans les figures 87 et 88 une comparaison entre les différentes méthodes. Ces différentes figures montrent encore qu'il n'y a pas une différence significative entre les différentes approches dans l'estimation de la fréquence de résonances. Cependant on observe que la méthode ARMA et spectrale (FFT) sont mieux corrélés en amortissement. En effet, les pics et les vallées pour les deux méthodes spectrale et ARMA coïncident mieux par rapport aux approches AR. Il est à noter aussi, que les approches AR ne manifestent pas une très grande différence entre elles. On note là aussi que le PSD de la méthode spectrale est noyé dans le bruit et montre de fausses fréquences dans la bande de 0 à 17 Hz (avant le premier mode) par rapport aux méthodes AR et ARMA.

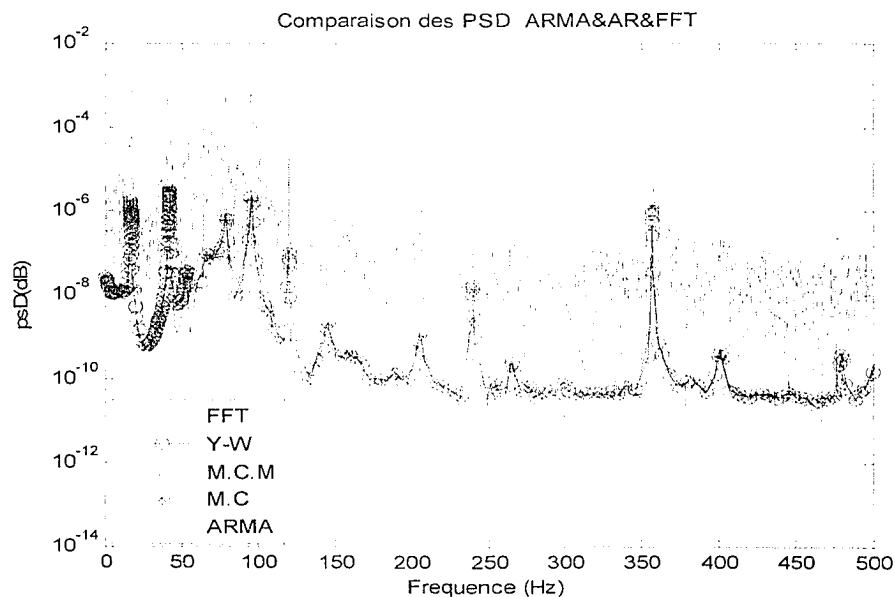


Figure 87 Comparaison du PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et ceux obtenus avec les méthodes AR et ARMA (tout les modes de la structure oiseau dans l'eau en écoulement)

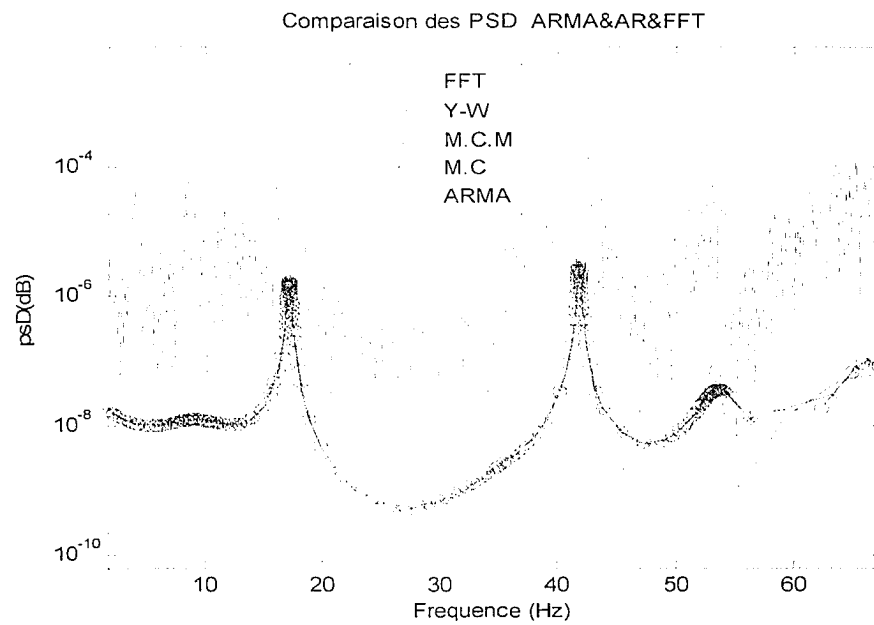


Figure 88 Comparaison du PSD obtenu expérimentalement (avec le FFT) et ceux obtenus avec les méthodes AR et ARMA (premiers modes de la structure oiseau dans l'eau en écoulement)



## CHAPITRE 9

### MODÈLE EAU-AIR ÉQUIVALENT (M.E.A.E)

#### 9.1 Objectif de l'étude

La masse ajoutée sur une structure vibrant dans l'eau devrait être égale à la masse d'eau équivalente à la force de réaction de cette structure réf [1]. Cette masse peut être présentée par un volume d'eau cylindrique imaginaire autour cette structure illustrée dans la figure 89.

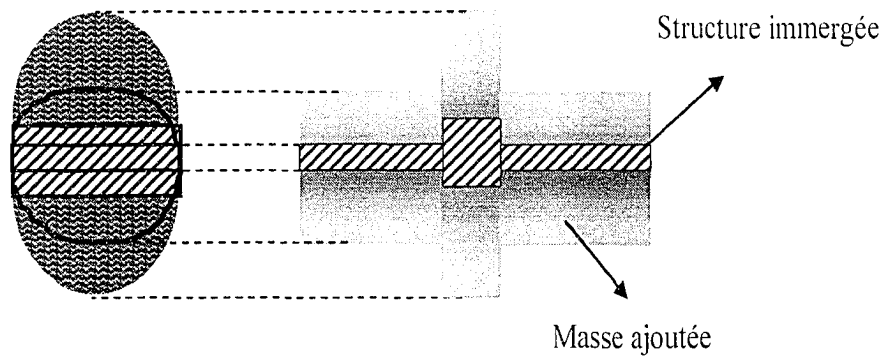


Figure 89 Masse ajoutée d'une structure immergée dans l'eau

Ceci laisse croire qu'on pourrait construire une méthode qui permet d'estimer les fréquences de résonances d'une structure dans l'eau à partir des fréquences mesurées dans l'air.

L'idée consiste à considérer qu'on pourrait trouver pour la même structure, une masse équivalente qui permet de produire le même effet de masse ajoutée que celui provoqué par l'eau.

Cette partie a donc pour objectif d'essayer de présenter une façon approximative que nous appelons Modèle Eau Air Équivalent et qui nous donnera une masse équivalente qui servira à notre fin.

## 9.2 Modèle Eau-Air-Équivalent (M.E.A.E)

En se basant sur les résultats de mesure, on pourrait penser à un modèle équivalent, qui nous permettrait de calculer les fréquence de résonance dans l'eau rien qu'en connaissant les fréquence de résonance dans l'air tant qu'on a une idée sur les rapports entre les deux. On utilisera les méthodes des éléments finis pour mettre en œuvre cette idée.

Soient :

$k$  est la raideur de la structure;

$m_{air}$  est la masse de la structure dans l'air;

$m_{eau}$  est la masse de la structure dans l'eau;

$\omega_a$  est la fréquence de résonance dans l'air;

$\omega_e$  est la fréquence de résonance dans l'eau;

$\rho_a$  est masse volumique de la structure dans l'air (2720 kg/m<sup>3</sup>);

$\rho_e$  est la masse volumique de la structure dans l'eau (masse volumique équivalente en (kg/m<sup>3</sup>));

$\rho_m$  est la masse volumique équivalente moyenne(kg/m<sup>3</sup>);

$\lambda$  est le rapport de la fréquence de résonance dans l'eau sur la fréquence de résonance dans l'air.

Si on fait le rapport entre les deux fréquences de résonances :

$$\lambda = \frac{\omega_e}{\omega_a} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_{eau}}}}{\sqrt{\frac{k}{m_{air}}}} \Rightarrow m_{eau} = \frac{m_{air}}{\lambda^2} \quad (9.1)$$

À partir de l'équation (9.1) on peut conclure que :

$$\rho_c = \frac{\rho_a}{\lambda^2} \quad (9.2)$$

En considérant une masse volumique de 2720 kg/m<sup>3</sup> pour l'aluminium, la masse volumique équivalente pour chaque mode est montrée dans le tableau XXIV.

Tableau XXIV

Masses volumiques équivalentes pour chaque mode

Mode	1	2	3	4	5	6	Moyenne
$\lambda$ (%)	44,7	40,6	57,66	44	48	52,4	47,9
$\rho_c$	13588,7	16525,7	8181,3	14024,1	11835,1	9898,6	12342

En faisant le calcul sur Ansys, en remplaçant la masse volumique de l'aluminium par la masse volumique moyenne air-eau, on obtient les fréquences de résonances dans le tableau XXV. Les modes manquants sont des modes de torsion qui n'ont pu être excités expérimentalement, car l'impact a été donné au centre du massif.

Tableau XXV

Erreur par rapport à la valeur  $r_{moyen}$  sur les fréquences estimées dans l'eau

Modes	$r_{moyen}$	Modes	Fréquences mesurées en l'eau (Hz)	Erreur (%)
1	18	1	17	6
2	54	2	43	26
3	63			
4	74	3	79	6
5	102	4	96	6
6	168	5	151	11
7	205			
8	212	6	206	3
9	275	7	266	3.4
10	337		340	1
11	367	8		1
12	371	9	359	3
13	400			
14	406	10	401	1

On constate que cette méthode approximative permet d'estimer les fréquences naturelles d'une structure immergée avec une erreur moyenne de l'ordre de 7%.

### 9.3 Comparaison des modes

On compare les modes vibratoires mesurés dans l'eau et ceux estimés avec le modèle Eau-Air-Equivalent et on trouve les correspondances illustrées dans les figure 90, figure 91 et figure 92.

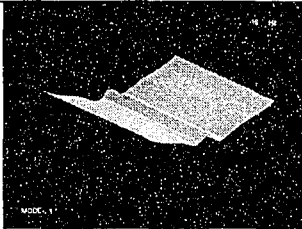
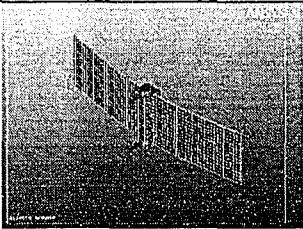
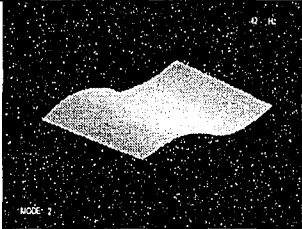
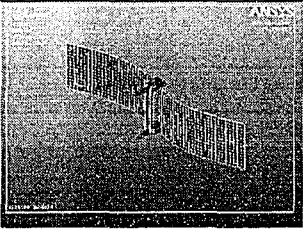
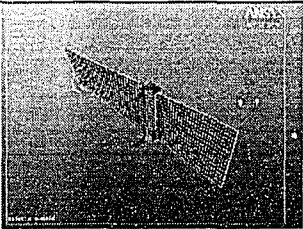
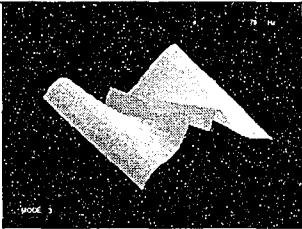
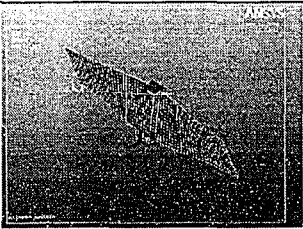
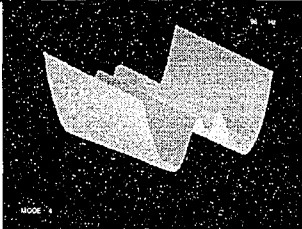
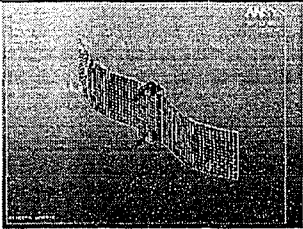
Expérimental	Modèle Équivalent
 <p>Mode1. 17 Hz</p>	 <p>Mode1. 18 Hz</p>
 <p>Mode2. 43 Hz</p>	 <p>Mode2. 54 Hz</p>
	 <p>Mode3. 63 Hz</p>
 <p>Mode3. 79 Hz</p>	 <p>Mode4. 74 Hz</p>
 <p>Mode4. 96 Hz</p>	 <p>Mode5. 102 Hz</p>

Figure 90      Comparaison des modes mesurés dans l'eau  
avec les modes estimés avec le M.E.A.E

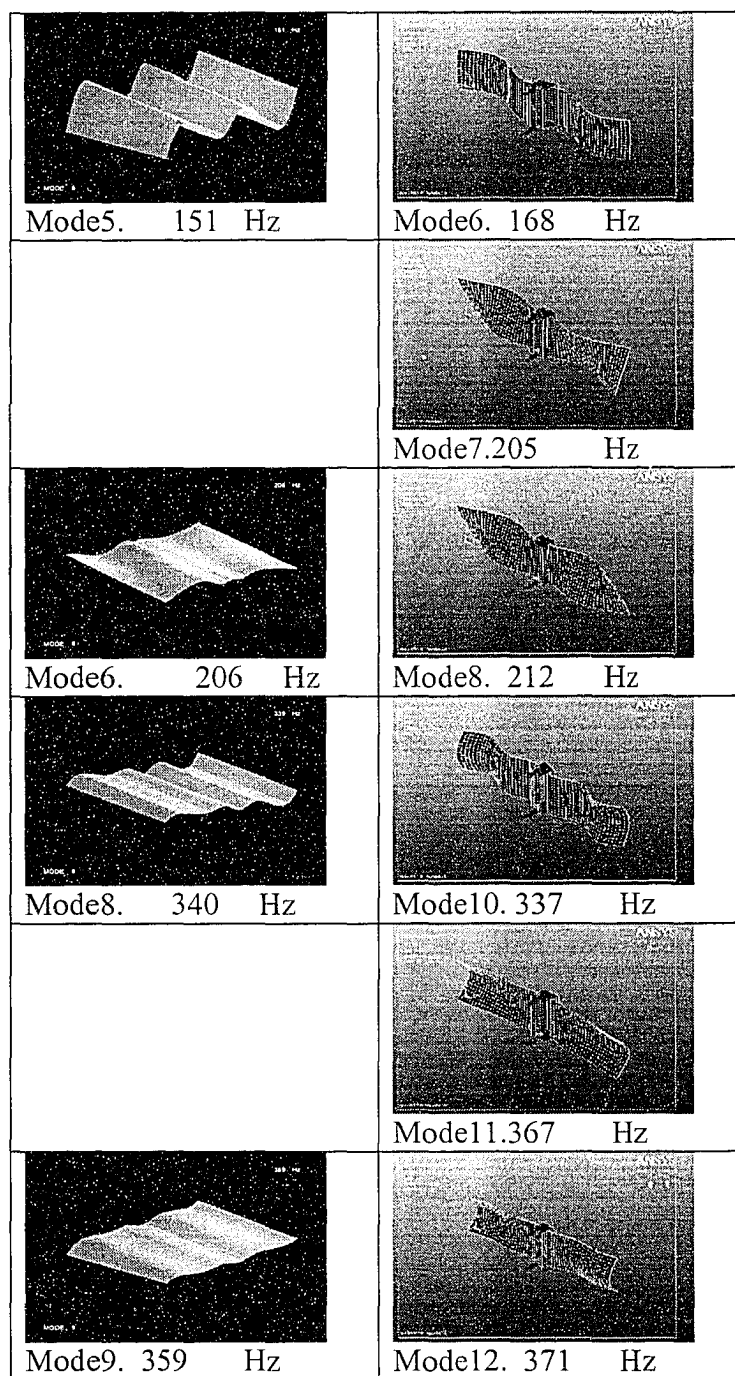


Figure 91 Comparaison des modes mesurés dans l'eau avec les modes estimés avec le M.E.A.E

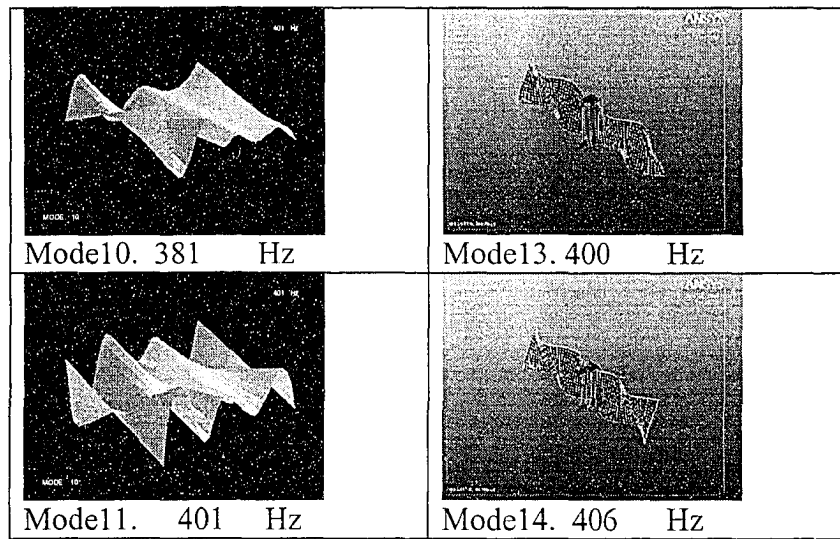


Figure 92 Comparaison des modes mesurés dans l'eau avec les modes estimés avec le M.E.A.E

#### 9.4 Conclusion

On voit qu'à cette la valeur moyenne de la masse volumique ( $r_{moyen}=12342 \text{ kg/m}^3$ ), on reproduit toutes les fréquences de résonances approximativement avec une erreur qui varie entre 0,57% et 23 %, soit une erreur moyenne de l'ordre de 7 % ce qui serait une bonne estimation. Ce résultat préliminaire n'est valide que pour la structure oiseau. Il faudrait valider cette méthode avec d'autres structures.

## **DISCUSSION ET INTREPRETATION DES RÉSULTATS**

On a vu que l'identification des paramètres avec la méthode spectrale donne de très bons résultats comparativement avec la méthode éléments finis dans l'air. Ceci nous a permis de mettre en évidence l'existence de l'effet de masse ajoutée en présence de l'eau stagnante. En effet on avait mis en évidence un rapport de l'ordre de 40 % à 60% selon le mode entre les fréquences de résonance dans l'air et les fréquences de résonance dans l'eau stagnante pour la structure oiseau. On n'a pas remarqué une variation significative de l'amortissement de la structure dans l'eau stagnante.

On note aussi que les fréquences de résonance mesurées entre les deux hauteurs d'immersion réalisés sont identiques.

Par ailleurs les résultats obtenus lors de ce projet concorde assez bien avec les résultats mesurés et calculés à l'IREQ.

On a vu que le modèle Eau-Air-Équivalent donnait une bonne estimation des fréquences de résonances dans l'eau à partir des fréquences de résonances mesurées dans l'air.

On a montré que le critère d'Akaike donne de bons résultats bien que l'ordre ne soit pas très précis par rapport aux critères de stabilité.

On a vu aussi l'avantage que présente le modèle ARMA sur le modèle AR dans l'identification des paramètres dans le domaine temporel. La mise au point numérique montrait que la méthode ARMA est plus efficace pour les niveaux de bruit élevé. En effet on avait atteint un niveau de bruit de 350 % pour les amortissements de l'ordre de 1%. Et on a vu que les résultats estimés par FFT lors d'un écoulement était bruités et contenaient des erreurs par rapport aux résultats obtenus avec les méthodes temporelles.



## CONCLUSION

On a vu durant ce projet, une présentation de l'analyse modale expérimentale appliquée à une structure immergée dans l'eau soumise à un écoulement turbulent.

On a vu la facilité d'utilisation de la technique du marteau d'impact pour une structure vibrant dans l'air. En effet, la mesure de la force d'excitation est facile dans ce cas. L'application de cette méthode pour une structure vibrant dans l'eau n'était pas évidente, car la mesure de la force d'excitation dans ce cas n'est pas évidente, même pour une eau stagnante. Seulement, on a pensé à contourner notre problème, en concevant une tige qui prolonge l'embout du marteau. Ceci, permet de réaliser l'analyse modale dans l'eau stagnante à l'aide du marteau d'impact pour différentes hauteurs d'immersions, tout en mesurant la force d'excitation dans l'eau et sans pour autant noyer le marteau dans l'eau. Ce travail a donc donné naissance à cette idée. Nous suggérons ainsi, aux constructeurs de matériels d'analyse modale de généraliser cette méthode et de concevoir des rallonges inoxydables, pour prolonger le marteau d'impact, durant ce genre d'essais. Cette rallonge peut être utile en industrie, pour faire aussi l'analyse modale dans l'air, dans certains cas où les points d'intérêt ne sont pas accessibles.

Ceci dit, l'application de la méthode d'identification spectrale à l'aide d'un marteau d'impact, nous a permis de mettre en évidence l'existence de la masse ajoutée due à la présence de l'eau stagnante. On a vu aussi que cet effet était identique pour les deux hauteurs d'immersion qui sont de 15 cm et 37,5 cm.

Par ailleurs, les méthodes ARMA et AR donnent de très bons estimés des fréquences de résonances comparativement à la méthode spectrale par FFT. En effet, les applications effectuée dans l'air et dans l'eau stagnante ont permis de constater qu'on a les mêmes les résultats avec les deux méthodes. Quant à l'amortissement, on a constaté qu'il y a une meilleure corrélation entre la méthode ARMA et la méthode spectrale (FFT) qu'entre la

méthode AR et la méthode spectrale. On note aussi qu'on n'a pas constaté une différence significative entre les différentes approches AR.

L'analyse modale était faisable dans l'air et dans l'eau stagnante avec les méthodes AR, ARMA et FFT. Cependant, on privilégie la méthode spectrale (FFT) dans ce cas, vu la facilité de la mesure de la force et des modes vibratoires.

Cependant, la méthode spectrale, ne nous permet de faire l'analyse modale qu'en mesurant les fonctions de transfert en mesurant la force d'excitation. Ceci constitue la limite d'application de cette méthode, car en écoulement, on ne peut pas mesurer la force d'excitation. Cette situation, privilégie les méthodes d'identification dans le domaine temporel, à savoir les méthodes AR et ARMA par rapport au FFT, car ces méthodes ne nécessitent que la connaissance de la réponse temporelle de la structure.

L'application des méthodes ARMA et AR, dans un écoulement d'une vitesse de 2 m/s, a permis de voir qu'on trouve les mêmes fréquences de résonance en écoulement qu'en eau stagnante. Par conséquent, on montre qu'on n'a pas d'effet de masse ajoutée supplémentaire engendré par l'écoulement.

On a constaté aussi en écoulement, que les pics et les vallées des DPS entre les méthodes ARMA et spectrale (FFT) coïncident mieux que de ceux entre les approches AR et la méthode spectrale. Cependant, le signal vibratoire mesuré en écoulement est un signal bruité, et on a bien constaté dans ce cas, que la DPS estimé avec le FFT était noyé dans le bruit par rapport aux méthodes AR et ARMA, comme on avait constaté de fausses fréquences apparues dans le FFT. Ceci avantage les méthodes temporelles par rapport à la méthode spectrale dans le cas d'un signal bruité.

L'analyse modale avec la méthode ARMA, a aussi montré que l'amortissement en écoulement a varié d'un rapport de l'ordre de 6 au premier mode par rapport à

l'amortissement dans l'air pour la structure oiseau. L'amortissement aux autres modes n'a pas changé significativement. Ceci montre qu'on a effectivement un amortissement ajouté en écoulement. On a vu d'une part, que l'amortissement ajouté par l'écoulement est positif pour certains modes, ce qui ne constitue pas un danger sur la structure, car lorsque l'amortissement ajouté est positif, l'eau contribue à amortir la vibration provenant de la structure. Néanmoins, on a constaté d'autre part, que l'amortissement ajouté par l'écoulement, est négatif pour certains modes (en effet l'amortissement a diminué pour les modes 2 et 3), ce qui constitue le danger de l'amortissement ajouté, car dans ce cas, l'amortissement joue l'effet inverse, et l'énergie vibratoire de l'écoulement se transmet vers la structure. Cependant, la structure devrait être soumise à des vitesses d'écoulements plus importantes, pour mieux apercevoir ce phénomène.

À titre de comparaison, nous avons pu extraire d'autres modes qui n'ont pas été mesurés à l'IREQ, dans l'air et dans l'eau. Tous ces résultats ont été présentés dans un article de conférence [34].

Finalement, le modèle eau air équivalent (M.E.A.E) présenté, a donné de très bons estimés des fréquences de résonance dans l'eau à partir des fréquences mesurées dans l'air. Seulement cette méthode a été validée uniquement sur la structure oiseau, on suggère donc de l'essayer sur d'autres structures.

## RECOMMANDATIONS

Les travaux à venir consiste en la mise en évidence expérimentale de l'amortissement ajouté sur un banc d'essais permettant de réaliser différents débits d'écoulements importants. Cependant la technique d'identification temporelle serait un bon choix pour accomplir ces essais. Aussi, un modèle de prédiction des fréquences de résonances dans l'eau est toujours intéressant à développer avec une option de calcul des fréquences des résonances dans l'eau à partir des fréquences de résonance dans l'air qui sont plus facile en général à identifier expérimentalement.

En ce qui concerne la technique d'identification dans le domaine temporel, il serait très intéressant d'étendre cette technique dans l'industrie en réalisant des logiciels concurrentiels, vu les nombreux avantages qu'elle offre pour son utilisateur. Ainsi, le travail doit être axé sur la détection des fréquences de résonances, des amortissements et, enfin, des modes propres qui constitue le volet qu'on pas été traités dans ce projet.

## **ANNEXE 1**

### **PROGRAMME ÉLEMENTS FINIS SUR ANSYS**

```

FINISH
/clear
/filnam,aillette modale
/title,aillette modale
/color,pbak,on,1,5
/REP
!parametres
E=6.444e10
poisson=0.3
rho=2720
!dimensions de la plaque
a=0.61
b=0.15
c=0.00319
a2=0.0506
c2=0.0506
!taille des éléments
t=0.01
/GO
/prep7
!choix du type d'élément
ET,1,SHELL63      !ou SHELL93 avec surface seulement
ET,2,COMBIN14,,,0
!spécifier les constantes reelles
R,1,c
R,2,c2
R,3,786!786 !raideur du ressort
MP,EX,1,E
MP,PRXY,1,poisson
MP,DENS,1,rho
/VIEW,1,1,1,1
!geometrie de la plaque
BLC4,0,0,a/2-a2/2,b
BLC4,a/2+a2/2,0,a/2-a2/2,b
BLC4,a/2-a2/2,0,a2/2,b
BLC4,a/2,0,a2/2,b
asel,all
aglu,all
K,30,a/2,0,c2+0.02
K,31,a/2,b,c2+0.02
L,10,30
L,11,31
!attribution des matériaux
ASEL,S,area,,1,2

```

```

Aatt,1,1,1 !attribue au volume le materiau 1,le reel 1 et le type 1
ASEL,S,area,,5,6
Aatt,1,2,1 !attribue au volume le materiau 1,le reel 1 et le type 1
LSEL,S,LINE,,9
LSEL,A,LINE,,11
Latt,,3,2 !attribue au volume le materiau 1,le reel 1 et le type 1
asel,all
/eshape,1
lsel,all
/eshape,1
!déclarer la taille des éléments et mailler
Esize,t
!maillage
AMESH,ALL
LMESH,ALL
/COLOR,ELEM,ORAN
EPLOT
!BLOQUAGES
DK,30,all,0
DK,31,all,0
alls
!acceleration pour definir le POIDS DE LA STRUCTURE : gx,gy,(gz=-9.81 la
pesanteur)
acel,0,0,-9.81
FINISH
/SOLU
ANTYPE,2!ANALYSE MODALE
MODOPT,lanb,14,0,3000,,off,,0
!dmprat, 0.02 ! COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT
SOLVE
FINISH

```

## **ANNEXE 2**

### **PROGRAMME MATLAB CALCUL DES AMORTISSEMENTS ET DES MODES PAR LA MÉTHODE SPECTRALE**



```
%-----
%Ce logiciel permet de calculer les amortissements et les modes pour plusieurs points
%simultanément à partir des fichiers de mesures. Ceci requiert de:
%   -Spécifier les parties réelle et imaginaire de la FRF pour tous les points (Por)
%   -Introduire les fréquences de résonances (Wn) telles que lues dans les fichiers de
%   mesures seulement si on choisit le mode manuel (option=1)
%
%Le logiciel a deux options, si:
%
%option=0 : Le mode d'exécution automatique, signifie que les fréquences de
%résonances seront %extraites automatiquement à partir des fichiers de mesures.
%
%option=1 : Le mode d'exécution manuel, signifie qu'il faut extraire les fréquences de
%résonances manuellement dans les fichiers de mesures.
%-----
%
%Fait Par :      Khaled Abassi
%
%ETS-Montréal
%Création HIVER2003
%Révision 1/04/2005
%-----
```

```

option=input('Pour le mode manuel taper 1, mode Automatique Taper 0 : ');
% P1 à P16 sont les FRF les points 1 à 16 (fichiers format ZONIC)
%-----PARAMETRES D'ENTREE-----

Por=[P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9 P10 P11 P12 P13 P14 P15 P16];

%choisir: 0<np<=1 pour faire une interpolation pour augmenter le nombre point ou
%np=1 pour garder la résolution initiale (précision fréquentielle initiale ce qui est
%recommandé par défaut car l'interpolation génère de faux points)
np=1;

if option==1

%résonances telles que lues (extraites manuellement) dans les fichiers de mesures
Wn=input('Introduire les n fréquences de résonances,vecteur 1 x n : ');
%résonance dans l'air: Wn=[38.1250 105.625 136.875 218.125 315 392.5];
end
%nombre de fréquences de résonances
Nfr=length(Wn);
%Nombre de points de mesures
NP=size(Por,2)/3;
%interpolation des valeurs :
frq1=P1(:,1);
res=np*frq1(2);%nouvelle résolution après interpolation(si np=1,pas d'interpolation)
%nouveau vecteur de fréquence après interpolation (si np=1,pas d'interpolation)
frq=0:res:frq1(end);
%-----
%superposition des figures
%-----
figure(1)
j=1;
for i=1:NP
    z1(:,i)=Por(:,j:j+2);
    j=j+3;
end
Po=[];
P=[];
or i=1:NP
    Re1=z1(:,2,i);%partie Réelle au point i.
    Im1=z1(:,3,i);%partie Imaginaire au point i.
    Re=interp1(frq1,Re1,frq,'spline');
    Im=interp1(frq1,Im1,frq,'spline');
    Pinterp=[frq;Re;Im]';
    subplot(2,1,1)

```

```

plot(frq,Im,'k')
grid on
hold on
legend('Partie Imaginaire')
subplot(2,1,2)
plot(frq,Re,'m')
grid on
legend('Partie Réelle')
hold on
Po=[Po Pinterp];%tout les points interpolés
P=[P Im'];%parties imaginaires interpolées de tout les points
end
%Résonances obtenues du graphique (cliquer avec le curseur sur les pics):
Disp('cliquer avec le curseur sur les pics')
c=ginput(Nfr);
Wn_gr=c(:,1)
%-----
%Résonances extraites automatiquement dans les fichiers de données
%-----
if option==0
fq=[];
ij=0;
kk=[];
for i=1:length(Wn_gr)%nombre de lignes
    ij=ij+1
    difr=fq'-Wn_gr(i,1);
    dfmin=min(abs(difr))
    rkk=find(abs(difr)==dfmin)
    kk=[kk;rkk];
end
Wn=fq(kk);
end
%-----
% extraction des rangs des fréquences
% de résonances dans les fichiers de données
ranget=[];
for i=1:length(Wn)
    ran=find(P1==Wn(i));
    ranget=[ranget;ran];
end
range=ranget';
%Extraction des modes
%Suivant les fréquences extraites manuellement
MODE=[];

```

```

MODEn=[];
for i=1:length(range)
    rang=range(i);
    mod=[];
    for j=1:size(P,2)
        PP=P(:,j);
        mod=[mod;PP(rang)];
    end
    MODE=[MODE mod];
    modn=mod./norm(mod);
    MODEn=[MODEn modn];
end
m=length(Wn);
disp('cliquer sur la bande de fréquence qui contient la variation de la partie
réelle')om=ginput(2*m);
om1=om(:,1);
%-----
%Calcul des taux d'amortissements
%-----
%Intervalles de calcul (autour de la fréquence de résonance).
j=0;
for i=1:m
    om2(i,1)=om(i+j,1);
    om2(i,2)=om(i+1+j,1);
    j=j+1;

    if j==length(om1)/2
        break
    end
end
%Les rangs des fréquences limites d'intervalles
k=[];
ij=0;
for i=1:size(om2,1)%nombre de lignes
    for j=1:size(om2,2)%nombre de colonnes
        ij=ij+1
        difr=freq'-om2(i,j);
        dfmin=min(abs(difr))
        rk=find(abs(difr)==dfmin)
        k=[k;rk];
    end
end

%Calcul des amortissements (appel de la fonction amortissement)

```

```

[ZETA]=amortissement(Po,k,Wn,res,NP,freq);
%AFFICHAGE DES RESULTATS
'Les fréquences de résonances en Hz'
Wn
'Les modes non normalisés'
MODE
'Les modes normalisés'
MODEn
'Les amortissements'
ZETA
    dfmin=min(abs(difr))
%Fonction du programme principale qui permet le calcul de l'amortissement.
%Synthaxe : amortissement(Po,om2,Wn,deltaf,NP)

function [ZETA]=amortissement(Po,om2,Wn,deltaf,NP)
j=1;
for i=1:NP
    z1(:,i)=Po(:,j+2);
    j=j+3;
end
%intervalle fréquentielle ou évaluer l'amortissement (intervalle contenant f1 et f2 telles
%que : zeta=(f2+f1)/2)

om3=round (om2/deltaf);
%toutes les fréquences de cet intervalle : autant d'intervalles que de fréquences de
%résonances:
ZETA=[];
for i=1:length(Wn)%boucle sur les fréquences de résonances
    interv=z1([om3(i,1):om3(i,2)],2,:); %sélection des intervalles
    ZETA=ZETA+interv;
end
for k=1:NP%début de la boucle sur les point 1 a 16
    int1=interv(:,k);
    max1=max(int1(:,1));
    min1=min(int1(:,1));
    for j=1:size(Po,1) :length(P112)    %début de la boucle sur le nombre de fréquence
        temoin=z1(j,2,i);
        if temoin==max1
            f2=j;
        else if temoin==min1
            f1=j;
        end
    end
    %fin de la boucle sur le nombre de fréquence
    zeta1=(Po(f2)-Po(f1))/(2*Wn(i));
end

```

```

ZETAp=abs([ZETAp;zeta1]);
end %fin de la boucle sur les point de 1 a 16
ZETA=[ZETA ZETAp];
end %fin de la boucle sur les fréquences de résonances
%la première ligne de la matrice ZETA des taux d'amortissements
%modaux aux différents points ce sont des ZEROS `a ne pas considérer:
%ZETA[zeta_1_1 zeta_1_2 .....zeta_1_n]
% .....
% .....
%      :
%      :
%      zeta_m_1 zeta_m_2 .....zeta_m_n]
% m: nombre de points: ici c'est 16
% n: nombre de fréquences de résonance(ou le numéro du mode): ici c'est 6
%ainsi: zetaij est l' amortissement au point i au mode j

```

### **ANNEXE 3**

#### **PROGRAMME MATLAB (TRACÉ DES MODES PROPRE DE LA STRUCTURE OISEAU)**

```
%-----
% Le logiciel 'modepropresailletteairAXIS' trace les Mode propres de a structure oiseau
%avec animation en trois dimensions. Il est doté d'une console de contrôle:
% Presser sur Début pour commencer. Son fonctionnement requiert d'introduire:
% ** MODEn : La matrice des modes normalisés calculés dans le logiciel
% "touslespointsFRFresonanceetmodesinterp1"
% ** wn : vecteur de fréquences de résonances
%-----
%
% Réalisé par: Khaled Abassi
% ETS Montréal
% Créé le 23-02-04
% Révisé le: 31/03/2005
% Référence: TOOLBOX MATLAB
%-----
```



```
function modepropresailletteairAXIS(action)

%Introduire la Matrice MODEn des modes normalisés par rapport à l'unité.

MODE= MODEn;

% Fréquences de résonances.

wn =2*pi*[38.1250 105.6250 136.8750 218.1250 315.0000 392.5];

%modes propres
%Pour aller au mode 11 activer jusqu'à MODE(:,11);
mode1=MODE(:,1);
mode2=MODE(:,2);
mode3=MODE(:,3);
mode4=MODE(:,4);
mode5=MODE(:,5);
mode6=MODE(:,6);
% mode7=MODE(:,7);
% mode8=MODE(:,8);
% mode9=MODE(:,9);
% mode10=MODE(:,10);
% mode11=MODE(:,11);
%première colonne amplitudes suivant Y au point X=x(1)
%Deuxième colonne amplitudes suivant Y au point X=x(2) et ainsi de suite.

%
% Géométrie
% x36 x33 x30 x27 x24 x21 0 x18 x15 x12 x9 x6 x3
% :-----:--:-----:
% : : :
% : : :
% x35 x32 x29 x26 x23 x20 0 x17 x14 x11 x8 x5 x2
% : : :
% : : :
% :-----:--:-----:
% x34 x31 x28 x25 x22 x19 0 x16 x13 x10 x7 x4 x1

%z(:,i)= 1E-3*[modei([ligne1]) 0 mode1([ligne2]);mode1([ligne3]) 0
%mode1([ligne4])];

%Pour aller au mode 11 activer jusqu'a z(:,11);

z(:,1)= 1E-3*[mode1([2 4 6 8]) 0 mode1([10 12 14 16]);mode1([1 3 5 7]) 0...
...mode1([9 11 13 15])];
```

```

z(:,2) = 1E-3*[mode2([2 4 6 8]) 0 mode2([10 12 14 16]);mode2([1 3 5 7]) 0...
...mode2([9 11 13 15])];
z(:,3) = 1E-3*[mode3([2 4 6 8]) 0 mode3([10 12 14 16]);mode3([1 3 5 7]) 0...
...mode3([9 11 13 15])];
z(:,4) = 1E-3*[mode4([2 4 6 8]) 0 mode4([10 12 14 16]);mode4([1 3 5 7]) 0...
...mode4([9 11 13 15])];
z(:,5) = 1E-3*[mode5([2 4 6 8]) 0 mode5([10 12 14 16]);mode5([1 3 5 7]) 0...
...mode5([9 11 13 15])];
z(:,6) = 1E-3*[mode6([2 4 6 8]) 0 mode6([10 12 14 16]);mode6([1 3 5 7]) 0 mode6([9
11 13 15])];
% z(:,7) = 1E-3*[mode7([2 4 6 8]) 0 mode7([10 12 14 16]);mode7([1 3 5 7]) 0
%mode7([9 11 13 15])];
% z(:,8) = 1E-3*[mode8([2 4 6 8]) 0 mode8([10 12 14 16]);mode8([1 3 5 7]) 0
%mode8([9 11 13 15])];
% z(:,9) = 1E-3*[mode9([2 4 6 8]) 0 mode9([10 12 14 16]);mode9([1 3 5 7]) 0
%mode9([9 11 13 15])];
% z(:,10) = 1E-3*[mode10([2 4 6 8]) 0 mode10([10 12 14 16]);mode10([1 3 5 7]) 0
%mode10([9 11 13 15])];
% z(:,11) = 1E-3*[mode11([2 4 6 8]) 0 mode11([10 12 14 16]);mode11([1 3 5 7]) 0
%mode11([9 11 13 15])];
% -----

play= 1;
stop=-1;

if nargin<1,
    action='initialize';
end;

if strcmp(action,'initialize'),
    oldFigNumber=watchon;

    figNumber=figure( ...
        'Name','Modes propres d"une ailette', ...
        'NumberTitle','off', ...
        'Visible','off', ...
        'DoubleBuffer','on', ...
        'BackingStore','off', ...
        'Colormap',[]);
    colordef(figNumber,'none')
    axes( ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.05 0.05 0.9 0.9], ...
        'Visible','off', ...

```

```

    'NextPlot','add');
text(2,5.8,"AIDE" ', ...
    'HorizontalAlignment','center');
text(2,5.5,"M.Abassi Khaled" ', ...
    'HorizontalAlignment','center');
text(2,5,"Debut" pour voir les Modes d'une ailettes hydraulique', ...

    'HorizontalAlignment','center');
text(2,4,' "Modes" pour choisir le numéro du mode', ...
    'HorizontalAlignment','center');
text(2,3,"Stop" pour arreter l'animation', ...
    'HorizontalAlignment','center');
text(2,2,"Vitesse" pour varier la vitesse d'oscillation', ...
    'HorizontalAlignment','center');
text(2,1,"Fermer" pour fermer la fenêtre', ...
    'Horizontal Alignment','center');
%=====
% Informations générales sur tout les boutons
labelColor=[0.8 0.8 0.8];
yInitPos=0.90;
xPos=0.9;
btnWid=0.08;
btnHt=0.05;
spacing=0.05;
%=====
% La CONSOLE
frmBorder=0.9;
yPos=0.05-frmBorder;
frmPos=[xPos-frmBorder yPos btnWid+2*frmBorder 0.9+2*frmBorder];
h=uicontrol( ...
    'Style','frame', ...
    'Units','normalized', ...
    'Position',frmPos, ...
    'BackgroundColor',[0.6 0.3 0.8]);

%=====
% Le bouton Debut
btnNumber=1;
yPos=0.90-(btnNumber-1)*(btnHt+spacing);
labelStr='Debut';
cmdStr='Debut';

callbackStr='modepropresailletteairAXIS("Debut")';

```

```

% information générale
btnPos=[xPos yPos-spacing btnWid btnHt];
startHndl=uicontrol( ...
    'Style','pushbutton', ...
    'Units','normalized', ...
    'Position',btnPos, ...
    'String',labelStr,
    'Interruptible','on', ...
    'Callback',callbackStr);

%=====
% Le bouton popup Mode
btnNumber=2;
yPos=0.90-(btnNumber-1)*(btnHt+spacing);
textStr='Mode';
popupStr=reshape(' 1 2 3 4 5 6 7 ',3,7);%sept modes
% informations generale sur le bouton Mode
btnPos1=[xPos yPos-spacing+btnHt/2 btnWid btnHt/2];
btnPos2=[xPos yPos-spacing btnWid btnHt/2];

popupHndl=uicontrol( ...
    'Style','text', ...
    'Units','normalized', ...
    'Position',btnPos1, ...
    'String',textStr);
btnPos=[xPos yPos-spacing btnWid btnHt/2];
popupHndl=uicontrol( ...
    'Style','popup', ...
    'Units','normalized', ...
    'Position',btnPos2, ...
    'String',popupStr);

%=====
% Le bouton STOP
btnNumber=3;
yPos=0.90-(btnNumber-1)*(btnHt+spacing);
labelStr='Stop';
% En posant userdata -1 (=stop) ca arrêter la démonstration.
callbackStr='set(gca,"Userdata",-1)';
% informations generales
btnPos=[xPos yPos-spacing btnWid btnHt];
stopHndl=uicontrol( ...
    'Style','pushbutton', ...
    'Units','normalized', ...

```

```

'Position',btnPos, ...
'Enable','off', ...
'String',labelStr, ...
'Callback',callbackStr);

%=====
% Le bouton INFO
labelStr='Info';
callbackStr='modepropresailletteairAXIS("info")';
infoHndl=uicontrol( ...
    'Style','push', ...
    'Units','normalized', ...
    'Position',[xPos 0.20 btnWid 0.10], ...
    'String',labelStr, ...
    'Callback',callbackStr);

%=====
% Le bouton Fermer
labelStr='Fermer';
callbackStr='close(gcf)';
closeHndl=uicontrol( ...
    'Style','push', ...
    'Units','normalized', ...
    'Position',[xPos 0.05 btnWid 0.10], ...
    'String',labelStr, ...
    'Callback',callbackStr);

%=====
% Le bouton ZLIM=[Zmin-Zmax]
btnNumber=4;
yPos=0.90-(btnNumber-1)*(btnHt+spacing)-0.1;
labelStr=mat2str([-1E-2 1E-2]);

% informations générales
btnPos=[xPos-0.07 yPos-spacing btnWid+0.08 btnHt];
ZLIMHndl=uicontrol( ...
    'Style','edit', ...
    'Units','normalized', ...
    'Position',btnPos, ...
    'Enable','on', ...
    'String',labelStr);
% information sur le bouton 'Zmin-Zmax'
textStr1='Zmin-Zmax'
```

```

btnPos11=[xPos-0.01 yPos-spacing+btnHt/2+0.03 btnWid+.02 btnHt/2+.02];
popupHndl3=uicontrol( ...
    'Style','text', ...
    'Units','normalized',
    'Position',btnPos11, ...
    'String',textStr1);

%=====
% Le bouton VITESSE
btnNumber=5;
yPos=0.90-(btnNumber-1)*(btnHt+spacing)-0.08;
textStr='Vitesse';
popupStr1=reshape(' 1 2 3 4 5 6 7 ',3,7);%Quatres vitesses
% -----
btnPos11=[xPos yPos-spacing+btnHt/2+0.001 btnWid btnHt/2+0.01];
btnPos21=[xPos yPos-spacing btnWid btnHt/2];
popupHndl2=uicontrol( ...
    'Style','text', ...

    'Units','normalized', ...
    'Position',btnPos11, ...
    'String',textStr);
btnPos=[xPos yPos-spacing btnWid btnHt/2];
popupHndl2=uicontrol( ...
    'Style','popup', ...
    'Units','normalized', ...
    'Position',btnPos21, ...
    'String',popupStr1);
%
hndlList=[startHndl popupHndl stopHndl infoHndl closeHndl popupHndl2 ZLIMHndl
popupHndl3];
set(figNumber,'Visible','on',

    'UserData',hndlList);

watchoff(oldFigNumber);
figure(figNumber);

elseif strcmp(action,'Debut'),
    wnumber=watchon;
    axHndl=gca;
    figNumber=gcf;
    hndlList=get(figNumber,'UserData');
    startHndl=hndlList(1);

```

```

popupHndl=hndlList(2);
stopHndl=hndlList(3);
infoHndl=hndlList(4);
closeHndl=hndlList(5);

popupHndl2=hndlList(6);
ZLIMHndl=hndlList(7);
popupHndl3=hndlList(8);
set([startHndl closeHndl infoHndl],'Enable','off');
set(stopHndl,'Enable','on');

% ===== Début de l'animation

n=get(popupHndl,'Value');
set(axHndl,'Userdata',play);
%coordonnées des points de mesures suivant Positions des capteurs suivant la
%longueur
x=[0 10 20 27 30 33 40 50 60 ];
%coordonnées des points de mesures suivant Positions des capteurs suivant la largeur
y=[0 14.7];
mode=n;
text(2,.5,'Modes propres d'une ailette hydraulique', ...
'HorizontalAlignment','center');
colordef(fgure,'none') ;

%limites de l'axe Z
zlim=eval(get(ZLIMHndl,'String'));
zmin=zlim(1);
zmax=zlim(2);
%-----Vitesse d'oscillation-----
nd=get(popupHndl2,'Value');
nombredondes=nd*10000;%
%-----

t=linspace(0,2*pi,nombredondes+1);

watchoff(wnumber);
numframes=nombredondes;

while get(axHndl,'Userdata')==play,
    for count=1:numframes,% début e la boucle sur le nombre de séquences
        if get(axHndl,'Userdata')~=play, break; end;
    %variation d'amplitude entre le minimum et le maximum
    %equation un degrés de liberté d'un mode.

```

```

zti=z(:, :, mode)*sin(wn(mode)*t(count));
xi=linspace(0,60,30); %axe X raffiné
yi=linspace(0,14.7,40); %axe Y raffiné
%grille de toutes les combinaisons (xi,yi)
[xxi,yyi]=meshgrid(xi,yi);
%interpolation linéaire nécessite 2 lignes de la matrice z.
zzi=interp2(x,y,zti,xxi,yyi,'spline');
%plot smooth data (lissage)
surf(xx,yyi,zzi)
shading interp
colormap(pink)
axis([0 60 0 15 zmin zmax])
% legend(num2str(wn(mode)/(2*pi)))
set(gca,'XColor','red','YColor','red','ZColor','red');

text(-40,7.5,zmin,'MODE =')
text(-30,5.5,zmin,num2str(n))
text(80,10,zmax,num2str(round(wn(mode)/(2*pi))))
text(85,9,zmax,'Hz')
drawnow;

    end;% fin de la boucle sur le nombre de séquences.
end;
% ===== Fin de l'animation
set([startHndl closeHndl infoHndl],'Enable','on');
set(stopHndl,'Enable','off');
elseif strcmp(action,'info');
    helpwin(mfilename)
end

```



## **ANNEXE 4**

### **LOGICIEL D'IDENTIFICATION DANS LE DOMAINE TEMPOREL (MÉTHODES AR ET ARMA)**

```

%-----
%           Logiciel d'identification avec la méthode temporelle.
%           Modèles: AR & ARMA
%           Le logiciel est composé de:
%   *** Logicielconfiguration: La partie principale qui permet de choisir le mode
%d'exécution expérimental ou numérique et de configurer les données d'entre
%(fréquence d'échantillonnage, temps Maximal d'analyse, etc.) et de choisir entre les
%modèles AR ou %ARMA.
%   ***choixcritere: application qui permet de choisir entre
%   le critère d'Akaike et de stabilité.
%
%   ***excecutionmodele: programme qui permet d'exécuter le modèle
%   choisi (AR ou ARMA)
%
%   ***order: fonction du critère d'Akaike.
%-----
%           Fait Par: Khaled Abassi
%           ETS Montréal
%           Création ÉTÉ2004
%           Dernière révision:31 /Mars/2005
%           Références:ToolBox MATLAB
%-----

```

```
type=input('Pour la simulation taper 1, pour les mesures experimentales taper 0 : ');
```

```
if type==1
```

```
f=input('Quelles sont les fréquences en Hz           =           ');
zet=input('Quels sont les amortissement en %         =           ');
amp=input('Quels sont les modes                       =           ');
phi=input('Quelles sont les phases                    =           ');
fe=input('Quelle est la fréquence d"échantillonnage (Hz) =           ');
tmax=input('Quel est le temps maximal d"analyse (Sec.) =           ');
```

```
% Les fonctions réalisant les fonctions mathématiques couramment utilisées
% en traitement du signal sont données par help elfun et help datafun.
% Le modèle de bruit le plus couramment rencontré dans les mesures est le bruit blanc
% Gaussien. Il est réalisé par la commande randn, donnée dans l'aide du répertoire
% ``elmat", help elmat.
```

```
T=1/fe;%période d'échantillonnage
%Axe des temps
t = (0:T:tmax);
%nombre d'échantillons
N=fe*tmax;
om=2*pi*f;
```

```
% Génération du signal non bruité
```

```
X11=0;
```

```
for i=1:length(om);
amp(i);
X11=X11+amp(i)*exp(-zet(i)/100*om(i)*t).*sin(om(i)*sqrt(1-
(zet(i)/100)^2)*t+phi(i)*pi/180);
end
```

```
% Génération du bruit
```

```
RBS=input('Quel est le rapport sigma(Bruit)/sigma(Signal) en %           =           ');
Sigma=std(X11)*(RBS/100);
% moyenne du bruit
moy = input('Quelle est la moyenne du bruit           =           ');
bruit = moy + Sigma*randn(1,N+1);
% Génération du signal bruité
X1b=X11'+ bruit';
X1b=detrend(X1b);
```

```

yb=[t' X1b];

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,X11)
grid on
legend('modèle réel ,signal sans bruit')
xlabel('temps(sec)')
ylabel('Amplitude')
subplot(2,1,2)
plot(yb(:,1),yb(:,2))

grid on

legend('modèle réel ,signal avec bruit')
xlabel('temps(sec)')
ylabel('Amplitude')

pause

yt=yb;
detrend(yt(:,2));
zt=iddata(yt(:,2),[],T);

%Choisir le Modèle (AR ou ARMA)
disp('')
modele=input('Taper 1 pour le modèle ARMA ,taper 0 pour le modèle AR : ');
%Choisir le critère (de stabilité ou d'Akaike)

choixcritere

else

%Estimation a partir des mesures expérimentales.
%Introduire les valeurs de la mesure temporelle

disp('Assurez-vous que vous avez introduit les valeurs de')
disp('La réponse temporelle- yt=[temps amplitude] ')
disp('Première colonne le temps- deuxième colonne l"amplitude ')
disp('Presser entrer pour continuer.....')
pause

%yt=[t d2x1]
t=yt(:,1);

```

```

X11=yt(:,2);
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,X11)
grid on
legend('modele reel')
xlabel('temps(sec)')
ylabel('Amplitude')
subplot(2,1,2)
plot(yb(:,1),yb(:,2))
grid on

detrend(yt(:,2));
zt=iddata(yt(:,2),[],T);
%Choisir le Modele (AR ou ARMA)
modele=input('Taper 1 pour le modele ARMA ,taper 0 pour le modele AR : ');
%Choisir le critere (de stabilité ou d'Akaike)
choixcritere

end

```

```

%-----
%               Ce programme fait partie du Logicielconfiguration
%      choixcritere: permet de choisir entre les critère d'Akaike et de stabilité.
%-----
%               Fait Par: Khaled Abassi
%               ETS Montréal
%               Création ÉTÉ2004
%               Dernière révision:31 /Mars/2005
%               Références:ToolBox MATLAB
%-----

crakaike=input('Taper 1: pour le critère d"Akaike,Taper 0: pour visualiser tout les...
...ordres(Stabilité) : ')
if crakaike==1
ordremax=input('Quel est l"ordre maximal      :      ')
%EXECUTER le modele
excecutionmodele
else
    ordre=input('Quel est l"ordre Mini-Maxi et le Pas Vecteur 1x3 [Omin Omax Pas]  =  )
    for ii=ordre(1):ordre(3):ordre(2)% Début de la boucle sur les ordres du modele
%EXECUTER le modele
        ordre=ii
        excecutionmodele
    end
end
end

```

```

%-----
%                               Ce programme fait partie du Logicielconfiguration
% executionmodele: programme qui permet d'exécuter le modèle choisi (AR ou
%ARMA)
%-----
%                               Fait Par: Khaled Abassi
%                               ETS Montréal
%                               Création ÉTÉ2004
%                               Dernière révision:31 /Mars/2005
%-----

if modele==0

disp(' Choisir l'une des approches suivantes          ')
disp('          ')
disp('    fb : The forward-backward approach (default)/Modified Covariance approach')
disp('    ls : The Least Squares method')
disp('    yw : The Yule-Walker method / Auto-correlation method ')
disp('    burg: Burg"s method')
disp('    gl : A geometric lattice method  ')
disp('          ')
disp('          ')
disp('          ')

approche=input('Quelle est l'approche du modèle AR(ls,yw,fb ou gl)    :          ')
if crakaike==1
ii=order(zt,approche,ordremax,mod);
end

'ordre= ', ii

%-----AR-----
aryt=ar(zt,ii,approche);
%-----

else

    if crakaike==1
        ii=order(zt,'fb',ordremax,modele);
        end
%-----ARMA-----
aryt=armax(zt,[ii ii]);
%-----
end

```

```

[zeros,poles]=zpkdata(aryt,'v');
sinvpoles=poles.^-1;
ksiomega=log(sinvpoles.*conj(sinvpoles))/(2*T);
lambda2=abs(1/T*log(sinvpoles))/2/pi;
lambda1=sqrt(real(lambda2).^2+imag(lambda2).^2);
ksi1=abs(ksiomega)/(2*pi*lambda1);%taux d'amortissement
res=sortrows([lambda1,100*ksi1])

```



```

%-----
%           Ce programme fait partie du Logicielconfiguration
%           order: fonction qui exécute le critère d'Akaike.
%-----
%           Fait Par: Khaled Abassi
%           ETS Montréal
%           Création ÉTÉ2004
%           Dernière révision:31 /Mars/2005
%-----

function p=order(zt,approche,ordremax,modele);

for p=2:2:ordremax;

if modele==1
th=armax(zt,[p p]);
else
th=ar(zt,p,approche);
end

fun(p)=aic(th);
end[rho_p,p]=min(fun);

```

## **ANNEXE 5**

### **SENSIBILITÉS DES ACCÉLÉROMÈTRES UTILISÉS**



The Modal Shop, Inc.  
3149 East Kemper Road  
Cincinnati, Oh 45241  
Phone: 1-800-4TMS  
(513) 351-9919  
FAX: (513) 459-2172

## Certificate of Calibration

Manufacturer: **PCB**  
Model: **330A**  
Description: **Structural Vibration Sensor**

Serial No.	Sensitivity (mV/g)	Serial No.	Sensitivity (mV/g)
29207	194.47	29220	204.37
29211	215.74	29225	234.37
29221	184.34	29229	211.72
29226	220.41	29233	202.33
29230	204.37	29205	202.61
29223	193.80	29214	226.01
29206	227.35	29219	223.71

### Notes:

1. Calibration is traceable to NIST through Project No. 822/267400-02
2. Sensitivity measurement is taken at 100Hz and 1g.
3. When used with a 433 Series Structural Signal Conditioner, the output from the signal conditioner will typically be five times greater than the reported sensitivity.

### Standards Used:

Manufacturer	Model	Description	Serial Number	Due Date
PCB	301A10	Ref. Accelerometer	908	5/10/01
N.I.	4551	DAQ Card	AE6HD1	12/4/04
PCB	433A03	Structural Sig. Cond.	10167	2/17/05

Temperature: 73 °F      Calibration Date: 17-Feb-04  
Humidity: 23 %      Calibrated by: Dusty Stroud  
Pressure: 1006 inches      Signature:

The results documented in this certificate relate only to the item(s) calibrated or tested. Calibration interval assignment and adjustment are the responsibility of the end user. This certificate may not be reproduced, except in full, without the written permission of The Modal Shop, Inc.

"Helping you test, model, and modify the behavior of structures."

## **ANNEXE 6**

### **ANALYSE MODALE DE LA STRUCTURE OISEAU DANS L'AIR SUR LE LOGICIEL CATIA**

### MAILLAGE

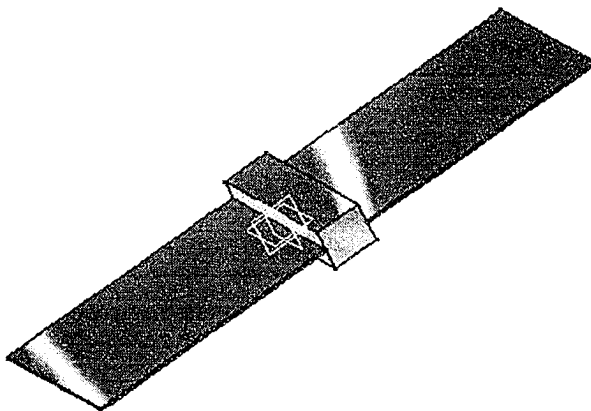
Entité	Nombre
Noeuds	36546
Éléments	18179

### Propriétés du matériau appliqué

<b>Matériau :</b>	Aluminium : Alloy 1100-H14 ( 99 % Al )
<b>Module de Young</b>	7e+010N_m2
<b>Coefficient de Poisson</b>	0,346
<b>Masse volumique</b>	2710kg_m3
<b>Coefficient d'expansion thermique</b>	0,0000236
<b>Limite élastique</b>	9,5e+007N_m2

### Cas de fréquence libre

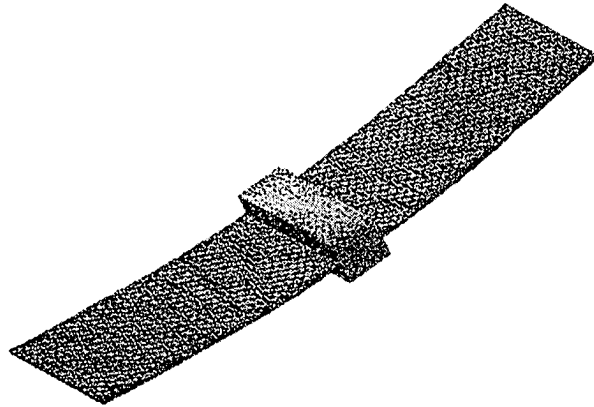
Conditions aux limites



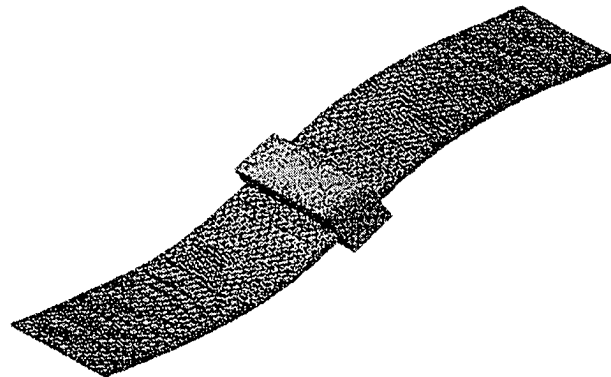
### Calcul de FREQUENCE

Numéro du mode	Fréquence Hz
1	38,626
2	113,31
3	131,06
4	153,5
5	220,19
6	330,54
7	432,59
8	444,92

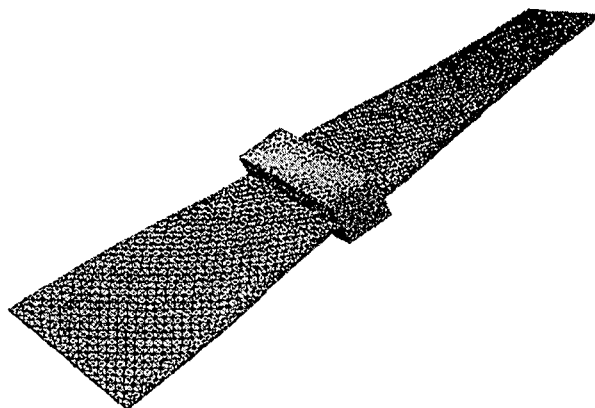
Solution modale.1 - Maillage Déformé - Numéro de Mode : 1 - Valeur du Mode : 38,626Hz



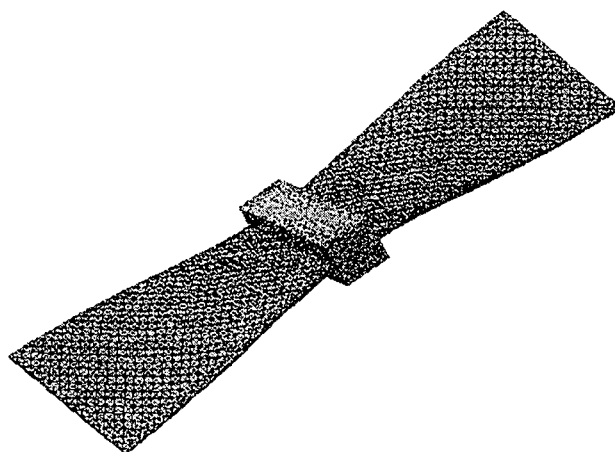
Solution modale.1 - Maillage Déformé - Numéro de Mode : 2 - Valeur du Mode : 113,315Hz



Solution modale.1 - Maillage Déformé - Numéro de Mode : 3 - Valeur du Mode : 131,063Hz

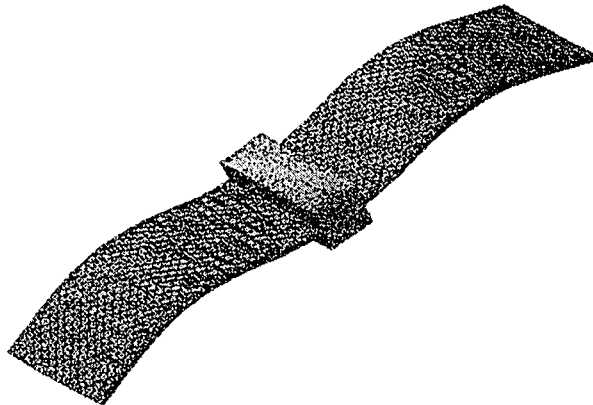


Solution modale.1 - Maillage Déformé - Numéro de Mode : 4 - Valeur du Mode : 153,501Hz

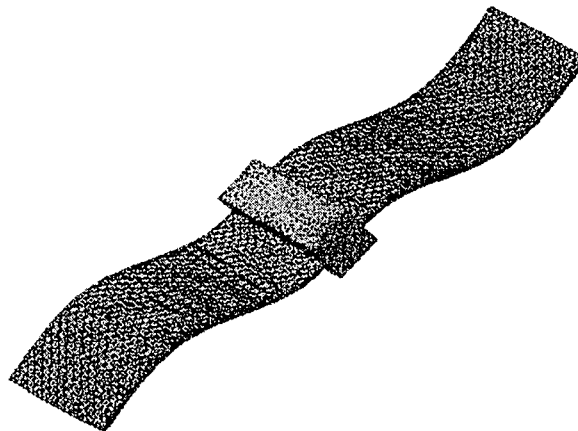




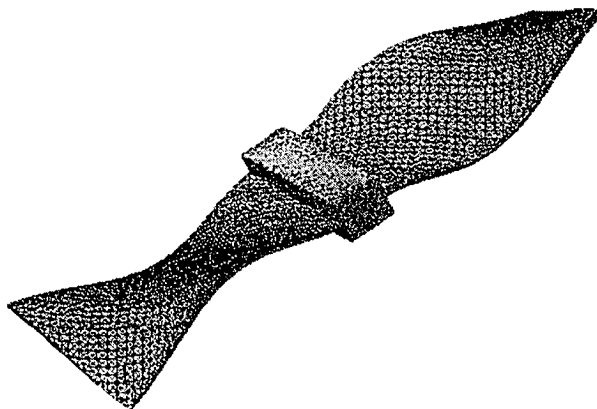
Solution modale.1 - Maillage Déformé - Numéro de Mode : 5 - Valeur du Mode : 220,185Hz



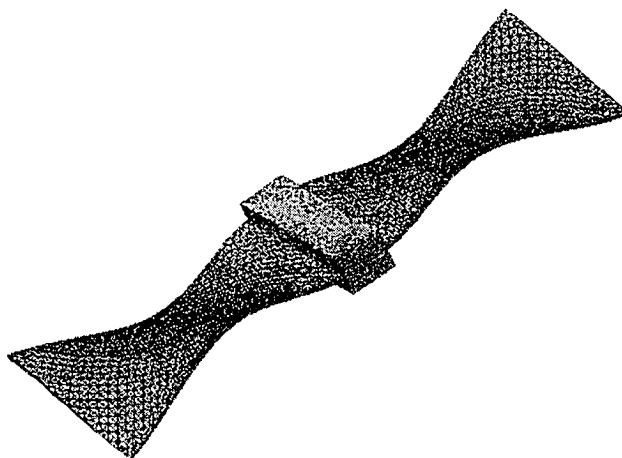
Solution modale.1 - Maillage Déformé - Numéro de Mode : 6 - Valeur du Mode : 330,544Hz



Solution modale.1 - Maillage Déformé - Numéro de Mode : 7 - Valeur du Mode : 432,588Hz



Solution modale.1 - Maillage Déformé - Numéro de Mode : 8 - Valeur du Mode : 444,918Hz



## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Lussier, A., vibrations libres d'une struture élastique dans un fluide lourd, in Quebec. 1998, Sherbrooke , Canada: Sherbrooke. p. 94.
- [2] Lakis, A.A., coques avec écoulement cours MEC6402. 2000, École Polytechnique de Montréal: Montréal.
- [3] K.Sinha, J., S. Sandeep, and A.R. Rao, Added mass and damping of submerged perforated plates. Journal of Sound and Vibration, 2002: p. Journal of Sound and Vibration, Volume 260, Issue 3, p 549-564.
- [4] Axisa, F., Modélisation des systèmes mécaniques / François Axisa : Interactions fluide-structure. Vol. 03. 2001, France: Paris : Hermes Science Publications, 2001. 416 p.
- [5] Axisa, F., Modélisation des systèmes mécaniques / François Axisa: Vibrations sous écoulements. Vol. 04. 2001, France: Paris : Hermes Science Publications, 2001. 432 p.
- [6] Gibert, R.-J., Vibrations des structures : interactions avec les fluides sources d'excitation aleatoires / Rene-Jean Gibert ; pref. de Robert Dautray. Eyrolles ed. 1998, Paris.
- [7] Conca, C., J. Planchard, and B. Thomas, Problèmes mathématiques en couplage fluide-structure : applications aux faisceaux tubulaires / Carlos Conca, Jacques Planchard, Bernadette Thomas ...[et al.] ; préf. de Robert Dautray. 1994, France: Paris : Eyrolles , 1994.
- [8] Herlufsen, H., Modal Analysis using Multi-reference and Multiple-Input Multiple-Output Techniques. 2002, Brüel&Kjær Application note, Denmark.
- [9] Ole, D., Structural Testing Part1: Méchanical Mobility Measurements: BRÜEL&KJAER Application note, Denmark.
- [10] Ole, D., Structural Testing Part2: Modal Analysis and Simulation: BRÜEL&KJAER Application note, Denmark.
- [11] LMS CADA-PC TRAINING.
- [12] Thomas, M., Fiabilité, maintenance prédictive des machines. École de technologie supérieure ed. 2002, Montréal. 616 p.
- [13] Ewins, D.J., Modal testing: theory, practice, and application. Baldock, Hertfordshire, England ; Philadelphia, PA : Research Studies Press ed. I. 2000, Angleterre ; États-Unis. 562 p.
- [14] LMS, Operational Modal Analysis-Structural modeling under real-life conditions. 1999, LMS Publication # 4.0/2078/A20/01.99 • covershot Copyright Benelux Press.

- [15] Herlufsen, H. and N. Møller, Operational Modal Analysis of a Wind Turbine Wing using Acoustical Excitation. 2002, BRÜEL&KJÆR Application note, Denmark.
- [16] Marroquin, M., Operational Modal Analysis - Case Study. Determining the Cause of Cracks with Operational Modal Analysis, Brüel & Kjær North America Inc.
- [17] Smail, M., Identification des structures vibrantes dans le domaine temporel. 1994, Ecole Centrale Paris: Paris. p. 227 p.
- [18] Smail, M., M. Thomas, and A.A. Lakis, Utilisation de la modélisation ARMA pour la détection de fissures dans les rotors. Industrial Automation International conference (AIAI), Juin 1999(Montréal): p. pp 21.1-21.4.
- [19] Smail, M., M. Thomas, and A.A. Lakis, Assessment of optimal ARMA orders for modal analysis. Mechanical Systems and Signal Processing, September 1999. v 13, no 5, p 803-819.
- [20] Bonnecase, D., M. Prevosto, and a. Beneviste. Application of multidimensional ARMA model to modal analysis under natural excitation. in 8th International Modal Analysis Conference. 1990. KISSIMMEE, FLORIDA: Society for Experimental Mechanics, Inc.
- [21] Marple, S.L., Digital spectral analysis with applications. 1 ed. 1987, États-Unis: Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hal. 492 p.
- [22] Landau, I.D. and A. Besançon-Voda, Identification des systèmes / sous la direction de Ioan D. Landau, Alina Besançon-Voda. 2001, France: Paris : Hermès Science Publications , 2001. 373 p.
- [23] Ljung, L. and T. Glad, Modeling of dynamic systems / Lennart Ljung, Torkel Glad. 1994, États-Unis: Englewood Cliffs, N.J. : PTR Prentice Hall , c1994. 361 p.
- [24] CHI, M.-J.W.S., Identification des paramètres modaux d'une structure flexible en vue de contrôle adaptatif de ses vibrations. 1998, École de Technologie Supérieure: Montréal. p. p. [136]-140.
- [25] Morand, H.J.-P. and R. Ohayon, Interactions fluides-structures. Masson ed. 1992, Paris. 212 p.
- [26] Harris, C.M., Shock and vibration handbook. 1998. 1 v. (pag. multiple).
- [27] Preumont, A., Vibrations aleatoires et analyse spectrale . 1990: Lausanne, Suisse : Presses polytechniques romandes. 343 p.
- [28] Thomas, M., Notes de cours de vibrations avancées Sys845. 2005: Montréal.
- [29] Thomas, M., Notes de cours de conception vibratoire Mec523. 2005, Montréal.
- [30] Inman, D.J., Engineering vibration. PRENTICE HALL, Englewood Cliffs ed. 1996, New Jersey.

- [31] Blanchet, G. and M. Charbit, Traitement numérique du signal: simulation sous Matlab. Hermes ed. 1998, Paris. p. [307]-311; Index: p. [215]-319.
- [32] Landau, I.D., Identification des systèmes / Ioan D. Landau. 1998, France: Paris : Hermès , 1998. 122 p.
- [33] Guglielmi, M., Signaux aléatoires : modélisation, estimation, détection. Hermès Science Publications ed. Signaux aléatoires : modélisation, estimation, détection. 2004, Paris. 377 p.
- [34] Abassi, K., Thomas, M., Marcouiller, J.L., Lakis, A.A., analyse modale expérimentale d'une structure soumise à un écoulement turbulent. In 23<sup>rd</sup> CMVA seminar, October 26-28, 2005, Canadian machinery vibration association. 2005. Edmonton, Alberta. p.10.
- [35] Thomas, M. and Laville, F., Simulation des vibrations mécaniques par Matlab, Simulink et Ansys. É.d.t. Université du Québec and c. supérieure, Editors 2005 : Montréal. p. 702.